

CIRJE-J-312

消費者研究における実験室実験：
マニピュレーション・チェック変数の効果推定

東京大学大学院経済学研究科
阿部 誠

2025年3月

CIRJE ディスカッションペーパーの多くは
以下のサイトから無料で入手可能です。
http://www.cirje.e.u-tokyo.ac.jp/research/03research02dp_j.html

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられたい。

Laboratory Experiments in Consumer Research: Estimating the Effects of Manipulation-check Variables

ABSTRACT

In consumer research and psychological experiments, subjects' states (attitudes) are manipulated by means of stimulus treatment in order to examine the effects of the subjects' states (attitudes) on the target variable. The interest here is not the effect of the treatment (stimulus) itself, but the effect on the target variable of the difference in state produced as a result of the treatment. Therefore, a manipulation check is usually performed to establish the validity of the experimental design, i.e., whether the stimulus produced the intended difference in state.

When the manipulation-check variable (state) is directly associated with the target variable, one encounters the problem of confounding that affects both variables. To eliminate this problem, randomized controlled trials (RCTs) are used, but two weaknesses exist: first, only a discrete, binary effect of the presence or absence of an treatment on the target variable can be uncovered. Second, the incompleteness of the experimental design, in which the state induced by the treatment (stimulus) varies from subject to subject, resulting in different effects on the target variable, cannot be taken into account.

In this study, we propose an approach that can correctly estimate the effect, which relates the manipulation-check variable to the target variable, even when unobserved confounding factors are present. By accounting for imperfections in the experimental design, the effect of the state variable becomes statistically more efficient than the effect of the experimental approach. The simulation analysis confirms that, for the same sample size, our instrumental variable approach is more significant than the usual experimental approach.

keywords: experiment, marketing, manipulation check, treatment, state, instrumental variable method

消費者研究における実験室実験：マニピュレーション・チェック変数の効果推定

東京大学大学院経済学研究科
阿部 誠

2025 年 3 月 20 日

消費者研究における実験室実験：マニピュレーション・チェック変数の効果推定

要約

消費者研究や心理学実験では、被験者の状態（態度）が目的変数に与える影響を検証するために、刺激の介入によって被験者の状態を操作する。ここでの関心は、介入（刺激）自体の効果ではなく、介入の結果生み出された状態の違いが目的変数に与える影響である。したがって、介入が意図された状態の違いをもたらしたか、という実験デザインの有効性を確立するために、通常マニピュレーション・チェックが行われる。

マニピュレーション・チェック変数（状態）を目的変数に直接、関連付けると、両方の変数に影響を与える交絡因子の問題に遭遇する。この問題を排除するためにランダム化比較試験（RCT）による実験を行うのだが、2つの弱点が存在する。1つ目は介入の有無が目的変数に与える影響の違いという2値の離散的な効果しか分からないこと、2つ目は介入（刺激）によって引き起こされる状態が被験者によって異なるため、結果、目的変数への影響が異なるという実験デザインの不完全性が考慮されていないことである。

本研究では、未観測な交絡因子が存在していても、介入変数を操作変数として組み込めば、マニピュレーション・チェック変数の目的変数に対する効果を正しく推定できる操作変数法アプローチを提案する。ここでは実験デザインの不完全性を考慮することで、状態変数の効果が実験アプローチの効果よりも統計的に効率的になる。したがって同じサンプルサイズでは、通常の実験アプローチより 操作変数法アプローチの方が有意な結果になることを、シミュレーション分析で確認する。

Keywords: 実験、マーケティング、マニピュレーション・チェック、介入、状態、操作変数法

1. はじめに

マーケティングの実証研究において実験を行う最大のメリットは、関心のない諸要因をコントロールすることができることにある。ランダム化比較試験(RCT)では、被験者を介入群と対照群にランダムに割付けることにより、観測される要因(共変量)と観測されない要因の両方の影響を、2群間でバランスさせることが可能になるためである。

実験には、実際の現場(市場)で行うフィールド実験と仮想的な場所で行う実験室実験の2つのタイプがある。フィールド実験の例としては、1970年代に始まった TVCM の購買への効果検証を RCT で検証した BehaviorScan® と呼ばれる IRI のリサーチ・サービスが有名であるが、そのほかにも値引き、クーポン、サンプリングなど販促活動の効果検証に広く使われている。近年の IT の発展により、ネット上では A/B テストと呼ばれる RCT が安価で容易に行える環境になった。実験室実験では、ASSESOR® などのプリマーケット・テストなどが知られている。これらの実験では、介入自体(広告の有無)が目的変数(売上)に与える影響に関心がある。

一方、消費者研究や心理学においても、実験室実験は王道のアプローチである。多くの場合、被験者の状態(態度)が目的変数に与える影響を検証するために、刺激の介入によって被験者の状態を操作する。ここでの関心は、介入(刺激)自体の効果ではなく、介入の結果生み出された状態の違いが目的変数に与える影響である。したがって、介入が意図された状態の違いをもたらしたか、という実験デザインの有効性を確立するために、マニピュレーション・チェック(多くは自己申告による回答)が不可欠となる。

本研究では、まず、マニピュレーション・チェック変数(状態変数)を目的変数と直接、関連付けるナイーブ・アプローチを考察する。次に、ナイーブ・アプローチの問題点である交絡因子の影響を回避するための、実験アプローチを紹介する。さらに、未観測な交絡因子の影響が存在していても、介入変数を操作変数として組み込めば、マニピュレーション・チェック変数が目的変数に与える影響を正しく推定できる操作変数法アプローチを提案する。

操作変数法アプローチのメリットは2つある。第1に、連続的であるマニピュレーション・チェック変数自体の目的変数に対する効果を推定できることである。このことは、離散的(0/1)である介入変数ではなくマニピュレーション・チェック変数(態度、状態)が研究の関心である消費者研究では特に有益である。第2に、マニピュレーション・チェック変数に対する介入効果の不完全性を考慮できることである。その結果、目的変数に与える影響が実験アプローチの効果よりも統計的に効率的になる。

本論文は以下のように構成されている。第2節では既存研究で用いられる実験室実験の分析手法として、ナイーブ・アプローチと実験アプローチを紹介して、その弱点を指摘する。そ

の弱点を克服すべく、第3節では、マニピュレーション・チェック変数の目的変数に対する効果を適切に推定できる操作変数法アプローチを説明する。第4節では、交絡因子が存在している状況でも、操作変数法アプローチによる効果推定がナイーブ・アプローチと実験アプローチの効果推定より優れていることをシミュレーション分析によって示す。第5節では、結論と操作変数法アプローチの拡張を提示して、論文をまとめる。

2. 実験室実験の分析における既存アプローチ

ナイーブ・アプローチと実験アプローチの説明する上で、以下のマーケティング問題考えてみよう。企業の SDG 活動には多大な資源が必要になるが、それは企業にとって本当に利益をもたらすのか？という経営上の課題がある。これを、より具体的な消費者研究のリサーチ・クエスチョン(RQ)に落とし込むと、以下が考えられよう。

【RQ】 企業の SDG イメージは、その企業に対する購買意向にどの程度、影響するのか？

この RQ に対する一番、単純なアプローチは、アンケートによって様々な企業の SDG 活動事例を提示して、消費者の態度と購買意向を自己申告で回答してもらい、分析することだろう。例えば、個々の事例に対して、「その企業の SDG イメージ」(x)を5点尺度で、「その企業に対する購買意向」(y)を7点尺度で回答してもらい、 y を x で回帰したモデル $y = a + bx + e$ を推定する。そして、 b が有意に正であれば、「効果有り」と結論付ける。

しかしながら、これは問題の多いナイーブなアプローチである。なぜなら、目的変数と説明変数の両方に相関している交絡因子の影響が排除されていないからだ。

中小企業の SDG 活動より、資源が多く広報の能力が長けている大企業の SDG 活動の方がより印象深いと同時に、消費者の購買意向が中小企業より大企業に有利に働くかもしれない。つまり、企業サイズという交絡因子は、説明変数と目的変数の両方に正の相関を持っている。その場合、交絡因子を無視した回帰モデルは、真の b の値を過大推定する。

逆に、同じ活動内容でも、それを見越した消費者が大企業の活動を中小企業の活動よりも割り引いて評価するかも知れない。つまり、企業サイズという交絡因子は、説明変数には負、目的変数には正の相関を持っている。この場合は、交絡因子を無視した回帰モデルは、真の b の値を過少推定する。

それならば、交絡因子を共変量として加えた回帰モデルを推定すればよいと考えるかもしれない。しかし、交絡因子のデータが観測できない、あるいはどのような交絡因子が存在するかさえも分からない場合には、共変量として組み込むことができない。

そこで RCT の出番である。様々な企業のマーケティング活動事例の内、介入群($T=1$)では SDG 活動、対称群($T=0$)では non-SDG 活動のいずれかを被験者にランダムに提示して、それに対する態度と購買意向を自己申告で回答してもらう。ランダム化によって交絡因子は2群間で同等の影響をもたらすため、目的変数の値を2群間で比較すれば SDG 活動(vs. non-SDG 活動)が購買意向に与える平均効果(Average Treatment Effect)を推定できる。つまり、 $ATE = E[y|T=1] - E[y|T=0]$ である。ここでは、実験デザインが有効であることを確立するために、介入が説明変数($x = \text{SDG イメージ}$)を操作できているかというマニピュレーション・チェックを行う。つまり、 $x = bT + e$ において $b > 0$ を確認する必要がある。

3. 操作変数法アプローチ

実験アプローチでは交絡因子の問題は解消されたが、SDG 活動の有無($T=1/0$)がどの程度、購買意向(y)の違いに反映されるのかという、2値レベルの違いしか得られない。しかし同じ刺激(SDG 活動)でも、もたらされる心理状態の程度(SDG イメージ)は被験者によって異なるだろう。通常、消費者研究の関心は、介入(刺激)自体の効果ではなく、介入の結果生み出された状態の違いが目的変数に与える影響である。したがって、介入(T) から y への離散的「影響」ではなく、SDG イメージ(x) から y への「影響度合い」(連続的)の方が有用だ。つまり、マニピュレーション・チェックのために測定された x を分析したいが、ナীব・アプローチで問題となる交絡因子の影響は排除したい。

そのため本研究では、未観測な交絡因子が存在していても、介入 T を操作変数とすれば、マニピュレーション・チェック変数(x)を目的変数(y)に関連付けて、 $E[y|x]$ を正しく推定できる操作変数法アプローチを提案する。つまり、RCT の介入が、マニピュレーション・チェック変数の値の違いを交絡因子に対してランダムに割付けている特性を利用するのである (Angrist and Pischke 2009)。

図1は今まで出てきた変数間の関係をまとめたものである。 x はマニピュレーション変数(SDG イメージ)、 y は目的変数(購買意向)、 u は交絡因子(企業サイズ)、 T は介入変数(SDG 活動=1、non-SDG 活動=0)である。

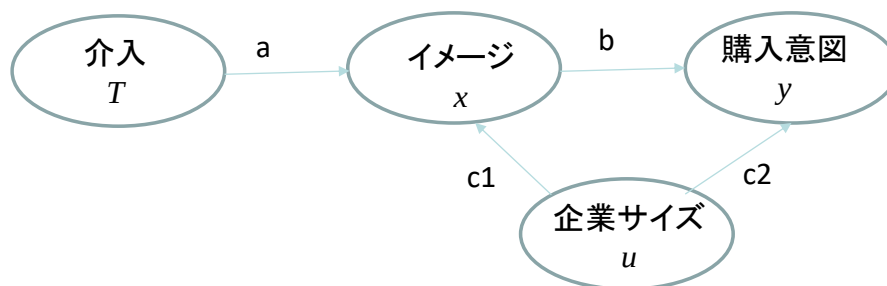


図1: 変数間の関係

3. 1. 操作変数

以下の2つの仮定を満たすような変数 z は、操作変数と呼ばれる (Wooldridge 2020)。

$$(1) \quad \text{cov}[z, u] = 0$$

$$(2) \quad \text{cov}[z, x] \neq 0$$

この特性を用いて、未観測な交絡因子が存在していても、 y に対する x の効果 b は、(3) 式で表せるというのが操作変数法である(付録1)。

$$(3) \quad b(IV) = \text{cov}[z, y] / \text{cov}[z, x]$$

介入変数 $T(1/0)$ が操作変数 z の仮定を満たすかは 3.2 節で詳細に検討するが、満たす場合は、 $z = T$ となって、(3) 式は(4) 式のように導出できる(付録2)。

$$(4) \quad b(IV) = \{ E[y|T=1] - E[y|T=0] \} / \{ E[x|T=1] - E[x|T=0] \}$$

3. 2. 操作変数法アプローチの仮定

操作変数法を用いて x の効果を適切に推定するためには、前節の操作変数に関する(1) 式(仮定1)と(2) 式(仮定2)に加えて、下記の仮定3と仮定4が必要になる(西山、新谷、川口、奥井 2019)。

[仮定1] exogeneity: 介入の有無は交絡因子(企業規模)と無相関

$$\text{cov}[z, u] = 0$$

RCT では介入の有無がランダムなため、この仮定は満たされる。

[仮定2] relevance: 介入の有無と状態(イメージ)には関連性がある

$$\text{cov}[z, x] \neq 0$$

介入の有効性は、回帰(介入 $\Rightarrow$ イメージ)モデルの F-検定で確認 (F>10 以上であれば関連性があるといえる (Staiger and Stock 1997))。

[仮定3] exclusion restriction: 介入は目的(意図)に状態(イメージ)を通じてのみ影響を与える。つまり、 x の値が決まれば、 z に関係なく、 y への影響は同じなので、これは z が y の式から除外されている(y に z が含まれない)ことを意味する。

仮定3が満たされているかは、 y を目的変数、 z を原因変数とした媒介分析において、媒介変数 x を通じた間接効果を含めると、直接効果が非有意になることを確認すればよい。た

だし、この媒介分析は交絡因子の影響を排除している必要がある。

[仮定4] monotonicity: 介入が有るとイメージが上がる。

$$\{E(x|T=1) - E(x|T=0)\} > 0$$

回帰(介入⇒イメージ)係数の t -検定で、有意に正か(仮定2)を確認すればいい。実験デザインでは、介入(T)によって x を意図する方向にマニピュレートするため、通常、この仮定は満たされる。

3. 3. 操作変数法アプローチの利点

操作変数法アプローチのメリットは2つある。

まず、連続的であるマニピュレーション・チェック変数自体の目的変数に対する効果を推定できることである。このことは、介入変数ではなくマニピュレーション・チェック変数(態度、状態)が研究の関心である消費者研究や心理学では特に有益である。

第2に、介入効果のマニピュレーション・チェック変数に対する不完全性を考慮できることである。つまり、同じ SDG 活動事例を刺激として与えても、被験者によって企業の SDG イメージが大きく高まる人と、少ししか高まらない人がいるだろう。結果、同じ介入群でも目的変数への影響が異なることが想定されるので、その違いを考慮することで、状態変数の効果が実験アプローチの効果よりも統計的に効率的になる(ノイズが少なくなる)。したがって同じサンプルサイズでは、通常の実験アプローチより 操作変数法アプローチの方が有意な結果が得られる傾向になる。

4. シミュレーション分析

この節では、SDG イメージが購買意向にあたえる影響を3つのアプローチ(ナイーブ、実験、操作変数法)で推定した結果を比較する。図1で表したように、 x はマニピュレーション変数(SDG イメージ)、 y は目的変数(購買意向)、 u は交絡因子(企業サイズ)、 T は介入変数(SDG 活動=1、non-SDG 活動=0)で操作変数に該当する。

シミュレーション分析では、 $a=b=1$ として、交絡因子の影響度 $c1$ と $c2$ を変えた4つのケースを考察する。 x と y にはそれぞれ、独立な標準正規分布(平均0, 分散1)にしたがう誤差項を加えて(図1には簡略化のために示していない)、1000 個のデータポイントを発生させた。ここで、3つのアプローチによる推定方法をまとめておこう。

ナイーブ・アプローチでは、実際の状態(態度)変数 x の値を目的変数 y に回帰して推定するため、AT(As Treated)と呼ぶ。

$$y = a + b(AT) x + e \text{ の 推定値 } b(AT)$$

実験アプローチは、介入群と対照群における目的変数 y の平均の差で、介入意図に基づく推定量なので、ITT (Intention To Treat) と呼ぶ。

$$b(\text{ITT}) = E[y|T=1] - E[y|T=0]$$

操作変数法アプローチの推定量は、第 3.1 節の (4) 式で表される。

$$(4) \quad b(\text{IV}) = \{E[y|T=1] - E[y|T=0]\} / \{E[x|T=1] - E[x|T=0]\} = b(\text{ITT}) / \{E[x|T=1] - E[x|T=0]\}$$

ここで介入変数 (T) が操作変数法アプローチの 4 つの仮定を満たしているかを考えてみよう。

[仮定 1] exogeneity: $\text{cov}[T, u] = 0$

介入の有無はランダムに決定されており、交絡因子とは無相関なので、満たされている。

[仮定 2] relevance: $\text{cov}[T, x] \neq 0$

実験の目的は、介入の有無で被験者の SDG イメージをマニピュレートすることなので、関連性があることが期待される。ここでは回帰モデル (介入 $\Rightarrow$ イメージ) の F-検定 (あるいは傾き係数の t 値の二乗) が有意であることを統計的に検証することで再確認する。

[仮定 3] exclusion restriction: 介入は目的に状態を通じてのみ影響を与える。

図 1 にしたがって発生させたシミュレーション・データでは、 T が y の式から除外されている (y の式に T が含まれない) ため、満たされている。

[仮定 4] monotonicity: $\{E[x|T=1] - E[x|T=0]\} > 0$

実験の目的は、介入有りで被験者の SDG イメージを上げるようマニピュレートすることなので、満たされていることが期待される。ここでは回帰 (介入 $\Rightarrow$ イメージ) 係数の t -検定で有意に正であることを再確認する。

表 1 は、 b の真値が 1 の場合の、ナイーブ・アプローチ $b(\text{AT})$ 、実験アプローチ $b(\text{ITT})$ 、操作変数法アプローチ $b(\text{IV})$ による推定結果とその標準誤差である。

表 1: 因果効果 b の推定結果

交絡因子の影響があると $b(\text{AT})$ にはバイアス加わるが、 $b(\text{ITT})$ と $b(\text{IV})$ にはバイアスが無い。また、標準誤差は実験デザインの不完全性を考慮した $b(\text{IV})$ の方が、 $b(\text{ITT})$ より小さい。

(カッコ内は標準誤差)

confounding	a	b	c1	c2	b(AT)	b(ITT)	b(IV)	回帰 F 値	回帰 t値	b(AT) biased?
No	1	1	0	0	1.01 (0.03)	1.05 (0.09)	1.02 (0.06)	249.7	15.8	unbiased
No	1	1	0	1	1.06 (0.04)	1.09 (0.12)	1.05 (0.09)	249.7	15.8	unbiased
Positive	1	1	1	1	1.47 (0.03)	1.12 (0.16)	1.05 (0.09)	127.2	11.3	over- estimation
Negative	1	1	1	-1	0.57 (0.03)	1.05 (0.09)	0.98 (0.09)	127.2	11.3	under- estimation

交絡因子の影響がない場合($c1=0$)、 $b(AT)$ はバイアス無く、標準誤差も $b(IV)$ や $b(ITT)$ より小さい。しかしながら、交絡因子が正の相関の場合($c1=1$ 、 $c2=1$)、 $b(AT)$ は真値を過大推定し、交絡因子が負の相関の場合($c1=1$ 、 $c2=-1$)、 $b(AT)$ は真値を過少推定する。一方、 $b(IV)$ や $b(ITT)$ はバイアス無く推定できている。標準誤差は実験デザインの不完全性を考慮した $b(IV)$ の方が、 $b(ITT)$ より小さい傾向がみられる。

次に操作変数法アプローチの4つの仮定が満たされているかを確認しよう。

仮定1 (exogeneity) は、ランダム化比較試験では介入が交絡因子と無相関なので満たされている。

仮定2 (relevance) は、表1の介入 (T) からイメージ (x) の回帰モデルの F 値が有意(10 以上)なので、満たされている。

仮定4 (monotonicity) は、表1の介入 (T) からイメージ (x) の回帰係数の t 値が有意に正なので、満たされている。

仮定3 (exclusion restriction) は、図2の交絡因子の問題がない状況($c1=0$)における2つの媒介分析では、介入 (T) から目的 (y) への有意な直接効果が、イメージ (状態 x) を媒介すると有意にならなくなるため満たされている。

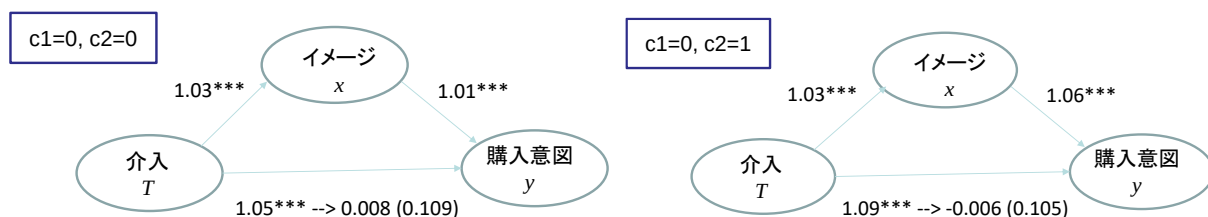


図2：媒介分析：

介入から購買意図への有意な直接効果は、イメージを媒介すると有意にならなくなる
(カッコ内は標準誤差)

表2は標準化推定値である。非標準化推定値と同様に、交絡因子の影響がない場合 ($c1=0$)、 $b(AT)$ はバイアスが無い。交絡因子が存在する場合、 $b(AT)$ には過大、あるいは過少の方向にバイアス加わるため、推定値は参考にならない。一方、交絡因子の問題が起きない $b(ITT)$ と $b(IV)$ では、実験デザインの不完全性を考慮した $b(IV)$ の方が、 $b(ITT)$ よりも大きな効果を見出している。

表2：標準化係数の推定結果

交絡因子の影響があると $b(AT)$ にはバイアス加わるが、 $b(ITT)$ と $b(IV)$ にはバイアスが無い。また、効果量は実験デザインの不完全性を考慮した $b(IV)$ の方が、 $b(ITT)$ より大きい。
(カッコ内は標準誤差)

confounding?	a	b	c1	c2	b(AT)	b(ITT)	b(IV)	b(AT) biased?
No	1	1	0	0	0.75 (0.02)	0.34 (0.03)	0.75 (0.05)	unbiased
No	1	1	0	1	0.64 (0.02)	0.28 (0.03)	0.63 (0.06)	unbiased
Positive	1	1	1	1	0.88 (0.02)	0.21 (0.03)	0.63 (0.05)	over-estimation
Negative	1	1	1	-1	0.58 (0.03)	0.34 (0.03)	1.00 (0.09)	under-estimation

5. 結論

消費者研究や心理学における実験室実験では、通常、被験者の状態(態度)が目的変数に与える影響を検証するために、刺激の介入によって被験者の状態を操作する。そして、介入が意図された状態の違いをもたらしたか、という実験デザインの有効性を確立するために、マニピュレーション・チェックが行われる。

ここでの研究の関心は、介入(刺激)自体の効果ではなく、介入の結果生み出された状態の違いが目的変数に与える影響を知ることである。当然、マニピュレーション・チェック変数

(状態)を目的変数に直接、関連付けると、両方の変数に影響を与える交絡因子の問題に遭遇する。この問題を排除するためにランダム化比較試験(RCT)による実験を行うのだが、2つの弱点が存在する。1つ目は介入の有無が目的変数に与える影響の違いという2値の離散的な効果しか分からないこと、2つ目は介入(刺激)によって引き起こされる状態が被験者によって異なるため、結果、目的変数への影響が異なるという実験デザインの不完全性が考慮されていないことである。

本研究では、未観測な交絡因子が存在していても、介入変数を操作変数として組み込めば、マニピュレーション・チェック変数(x)を目的変数(y)に関連付けた、 $E[y|x]$ を正しく推定できる操作変数法アプローチを提案した。このアプローチは、RCT の介入が、マニピュレーション・チェック変数の値の違いを交絡因子に対してランダムに割付けるという操作変数法のアイデアを利用している。シミュレーション分析では、未観測な交絡因子が存在する状況と無い状況において、ナイーブ、実験、操作変数法の3つのアプローチで因果効果の推定を比較した。

運用にあたって、操作変数法アプローチの利点は2つある。第1に、連続的であるマニピュレーション・チェック変数自体の目的変数に対する効果を推定できることである。第2に、マニピュレーション・チェック変数に対する介入効果の不完全性を考慮できることである。その結果、目的変数に与える影響が実験アプローチの効果よりも統計的に効率的になる。ここでは同じサンプルサイズでは、通常の実験アプローチより操作変数法アプローチの方が有意な結果になることを、シミュレーション分析で確認した。

このアプローチの限界としては、未知の交絡因子が存在する場合、適切な媒介分析が行えないため、仮定3が満たされているかの判断は、理論に頼らなければならないことである。仮定3が満たされない状況とは、介入がマニピュレーション・チェック変数でモニターしている以外の状態を変えて、それが目的変数に影響する場合である。したがって、マニピュレーション・チェック変数を複数項目の和にするなど、介入によって変化している状態を十分に捕捉する必要がある。

本論文では、一番単純な1因子(目的変数)2レベル(介入の有無)の分散分析の枠組みで実験室実験におけるマニピュレーション・チェック変数の効果推定を紹介した。この操作変数法アプローチの拡張としては、いくつかの方向が考えられる。第1に、2因子分散分析に拡張することである。交互作用の分析は、消費者研究や心理学では研究の中核である場合も多いため、この拡張は大変に有益である。第2に、外生変数である共変量を加えて、共分散分析の枠組みに拡張することである。第3に、調整(moderating)効果変数を含んだモデルに適用することである。

参考文献

- Angrist, J. D. and Pischke, J. S. (2009), *Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist's Companion*, Princeton University Press.
- Staiger, D. and Stock, J. H. (1997) "Instrumental Variables Regression with Weak Instruments," *Econometrica*, 65 (3), 557–586.
- Wooldridge, J. M. (2020), *Introductory Econometrics: A Modern Approach* (7th ed.), Cengage Learning, Inc.
- 西山、新谷、川口、奥井(2019), 計量経済学、有斐閣.

付録1

観測されない交絡因子を x_2 として、 y を(1)式のように定義する。

$$(1) \quad y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + e = b_0 + b_1 \cdot x_1 + u \quad \text{where } u = b_2 \cdot x_2 + e$$

したがって、誤差項 u に x_2 の影響が含まれる。

交絡因子の定義から、 $\text{cov}[y, u] \neq 0$ and $\text{cov}[x_1, x_2] \neq 0$

内生性(説明変数 x_1 と誤差項 u が相関)から、OLS では x_1 の効果推定にバイアス(du/dx_1)が存在する。

$$dy/dx_1 = b_1 + du/dx_1$$

ここで、以下の仮定を満たす操作変数 z を考える。

$$\text{cov}[z, u] = 0$$

$$\text{cov}[z, x_1] \neq 0$$

すると、

$$\text{cov}[z, y] = \text{cov}[z, b_0 + b_1 \cdot x_1 + u] = b_1 \cdot \text{cov}[z, x_1] + \text{cov}[z, u] = b_1 \cdot \text{cov}[z, x_1]$$

したがって、

$$b_1 = \text{cov}[z, y] / \text{cov}[z, x_1]$$

分母と分子に $\text{cov}[z, z]$ をかけると、

$$b_1 = (\text{cov}[z, y] / \text{cov}[z, z]) / (\text{cov}[z, x_1] / \text{cov}[z, z]) = b / a$$

つまり、 b_1 は、 y を z で回帰した係数 b と x_1 を z で回帰した係数 a の比と解釈できる。

操作変数 z を介入変数 T に置き換えると、操作変数推定量 b_1 は以下で表される(付録2)。

$$b1 = \{ E[y|T=1] - E[y|T=0] \} / \{ E[x|T=1] - E[x|T=0] \}$$

推定には2SLSを使うことも可能である(Wooldridge 2020)。

付録2

まず、

$$\begin{aligned} \text{cov}[z, y] &= E[zy] - E[z]E[y] \\ &= p_1 E[zy|z = 1] + p_0 E[zy|z = 0] - p_1 \{ p_0 E[y|z = 0] + p_1 E[y|z = 1] \} \\ &= p_1 \{ E[y|z = 1] - p_1 E[y|z = 1] \} - p_1 p_0 E[y|z = 0] \\ &= p_1 p_0 E[y|z = 1] - p_1 p_0 E[y|z = 0] \\ &= p_1 p_0 \{ E[y|z = 1] - E[y|z = 0] \} \end{aligned}$$

同様に、

$$\text{cov}[z, x] = p_1 p_0 \{ E[x|z = 1] - E[x|z = 0] \}$$

したがって、

$$b(\text{IV}) = \frac{\text{cov}[z, y]}{\text{cov}[z, x]} = \frac{E[y|z = 1] - E[y|z = 0]}{E[x|z = 1] - E[x|z = 0]}$$