Addendum May, 2004

New Model

1 Previous Model

まず以前のモデルを考えよう。セクター１の会社の数を n_1、セクター２のそれを n_2 とすると、各種の遷移確率は

$$w(n_1, n_2 \to n_1 + 1, n_2) = c_1 n_1 + f_1, \tag{1}$$
$$w(n_1, n_2 \to n_1, n_2 + 1) = c_2 n_2, \tag{2}$$
$$w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2) = d_1 n_1, \tag{3}$$
$$w(n_1, n_2 \to n_1, n_2 - 1) = d_2 n_2, \tag{4}$$
$$w(n_1, n_2 \to n_1 + 1, n_2 - 1) = \lambda(c_1 n_1 + f_1) d_2 n_2, \tag{5}$$
$$w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2 + 1) = \lambda d_1 c_2 n_1 n_2 \tag{6}$$

の対称的なものを考えた。唯一の非対称な項は、セクター２には innovation の寄与がないことである。このような遷移確率を選ぶことにより、導かれた方程式が簡単になる利点があった。一方以下で述べるような不自然な点もある。

2 New Model

各セクターの会社の数が独立に変化する遷移確率 (1-4) は前のモデルと同じであるが、セクター間で移動がおこる確率に関しては次のように考えられる。

2.1 セクター２からセクター１への遷移確率

セクター２の会社が技術革新を行って、セクター１へ昇格する場合を考える。これには二つの場合が考えられる。セクター１の会社の技術とは全く関係がなく、独立に技術開発を行って、セクター１へ昇格する場合である。この確率は n_2 には比例するが、n_1 に比例はしない。しかしこの確率は innovation rate f_1 に比例すると考えるのが合理的である。したがってこの遷移確率は、$f_1 n_2$ に比例する。この形は前のモデルの遷移確率 (5) に含まれている。

もう一つの場合は、セクター２の会社の技術革新がセクター１の会社のなんらかの影響、あるいは関連がある場合である。セクター１の会社と技術提携、指導を受ける、あるいは真似る。このような確率はセクター１の会社の数に比例するはずである。またこのような確率は、innovation の盛んな所、時期には大きいであろう。すなわちやはり innovation rate f_1 に比例すると仮定することは何ら不自然でない。したがって

$$w(n_1, n_2 \to n_1 + 1, n_2 - 1) = \lambda f_1 d_2 (1 + a n_1) n_2. \tag{7}$$

ここで a は数係数である。

2.2 セクター1からセクター2への遷移確率

セクター1の会社が技術革新を怠って、セクター2へ没落する遷移確率を考えよう。この確率がn_1に比例し、セクター1の死亡率d_1にも比例すると考えられる。しかし(6)のようにn_2にも比例するとは想像できない。セクター2の悪い影響を受けるとは考えられない。そこでこの遷移確率は$d_1 n_1$だけに比例すると仮定する:

$$w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2 + 1) = \lambda' d_1 n_1.$$

各種の遷移確率を innovation rate f_1 で規格化するのが大変都合がよいことが previous paper で経験済みである。そこで

$$w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2 + 1) = b\lambda f_1 d_1 n_1 \tag{8}$$

と置く。ここでbは単なる数係数である。

3 Model equations

前の論文通りに $k_1 = \langle n_1 \rangle, k_2 = \langle n_2 \rangle, k_{11} = \langle (n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 \rangle, k_{22} = \langle (n_2 - \langle n_2 \rangle)^2 \rangle, k_{12} = \langle (n_1 - \langle n_1 \rangle)(n_2 - \langle n_2 \rangle) \rangle$ に対する方程式を導く。Appendix で求めた対称的な方程式 (15) に次の遷移確率を代入する：

$$f_2 = 0, \quad b_1 = b\lambda f_1 d_1, \quad b_2 = \lambda f_1 d_2, \quad (a_1 = 0, a_2 = a\lambda f_1 d_2) \to 2\alpha = 2\beta = a\lambda f_1 d_2.$$

さらに$\gamma = \lambda f_1, \gamma_1 = \lambda d_1, \gamma_2 = \lambda d_2$を用い、$c_1/d_1 = 1 - n\gamma, c_2/d_2 = 1 - m\gamma$と置けば、

$$\begin{aligned}
\dot{k}_1 &= 1 - (n+b)\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + a\gamma_2 A_0 && (9)\\
\dot{k}_2 &= -(m+1)\gamma_2 k_2 + b\gamma_1 k_1 - a\gamma_2 A_0 && (10)\\
\dot{k}_{11} &= 1 - 2(n+b)\gamma_1 k_{11} + \gamma_1 \left(\frac{2}{\gamma} + b - n\right) k_1 + \gamma_2 (2k_{12} + k_2) \\
&\quad + 2a\gamma_2 (k_1 k_{12} + k_2 k_{11}) + a\gamma_2 A_0, && (11)\\
\dot{k}_{22} &= -2(m+1)\gamma_2 k_{22} + \gamma_2 \left(\frac{2}{\gamma} + 1 - m\right) k_2 + b\gamma_1 (2k_{12} + k_1) \\
&\quad - 2a\gamma_2 (k_1 k_{22} + k_2 k_{12}) + a\gamma_2 A_0, && (12)\\
\dot{k}_{12} &= -[(n+b)\gamma_1 + (m+1)\gamma_2] k_{12} + b\gamma_1 (k_{11} - k_1) + \gamma_2 (k_{22} - k_2) \\
&\quad - a\gamma_2 (k_1 k_{12} + k_2 k_{11} - k_1 k_{22} - k_2 k_{12}) - a\gamma_2 A_0. && (13)
\end{aligned}$$

ここで時間を$\tau = f_1 t$のように無次元化している。時間スケールτで見れば、現象は innovation rate に無関係であるから、実際の時間スケールはf_1が大きければ短くなる。

4 定常解

まずk_1, k_2の定常解を求めてみよう。(9, 10) の右辺をゼロと置くことにより、

$$k_1 = \frac{m + 1 + am\gamma_2 A_0}{m(n+b) + n} \frac{1}{\gamma_1}, \quad k_2 = \frac{b - an\gamma_2 A_0}{m(n+b) + n} \frac{1}{\gamma_2}. \tag{14}$$

5　数値結果

安定な定常解はかなり広いパラメター領域で存在する。定常解がパラメターと共にどのように変化するかを見るために、標準的な解を与えるパラメター群から出発する：

$$\gamma = \gamma_1 = 0.1, \quad \gamma_2 = 0.0001, \quad m = n = 0.01, \quad a = b = 0.001.$$

この時の k_i の値は

$$k_1 = 1000, \quad k_2 = 476, \quad k_{11} = 957884, \quad k_{22} = 13823, \quad k_{12} = 42060$$

である。相関係数 $co = k_{12}/\sqrt{k_{11}k_{22}}$、セクター1と2における揺らぎの相対的な大きさを $c_1 = \sqrt{k_{11}}/k_1, c_2 = \sqrt{k_{22}}/k_2$ と定義すれば、

$$co = 0.366, \quad c_1 = 0.979, \quad c_2 = 0.247$$

である。この解の近傍での線形化された方程式の固有値は全部負であるが、そのうちの最大固有値は $\lambda_{max} = -0.00018$ である。この標準パラメター群からいろいろなパラメターを変化させることにより、それらのパラメターの定常解に対する影響を調べる。

5.1　γ_2 の影響

γ_2 を変化させても、k_1 の大きさはほぼ1000に固定される。一方 k_2 は

$$k_2 \approx \frac{0.05}{\gamma_2}$$

のように変化する。$\gamma_2 = 0.1$ の時は、$k_2 = 0.4$ となり、セクター2は絶滅する。一方 k_{11}, k_{12} はそれほど変化しないのに対して、k_{22} は $\approx 1.5/\gamma_2$ のように変わる。

5.2　γ_1 の影響

標準モデルで γ_1 だけを変化させる．小さくさせると k_1 が増加し、k_2 が減少する：

$$k_1 = \frac{100}{\gamma_1}, \quad k_2 = \gamma_1 \times 10^4.$$

大きくすると、数係数はともかく γ_1 に関するスケーリングは上と同じである．

5.3　γ の影響

γ を0.1より大きくしても k_1, k_2 の値にはそれほど影響がない．しかし0.1より小さくすると、k_1 はほぼ一定であるが、k_2 は減少して、$\gamma = 0.0076$ では負に陥る．

5.4　b の影響

γ が0.1より小さくなると k_1 はほぼ1000のままで、k_2 は b と共に $5 \times 10^5 b$ のように減少する．反対に b が大きくなると、k_1 は減少するが、k_2 は増加する．

5.5 aの影響

$a \to 0$の極限では、$k_1 \approx k_2 \sim 1000$である。$a$が0.01より大きくなると$k_1$は変わらないが、$k_2$は小さくなり、$a = 10.0$では$k_1 = 1000, k_2 = 0.18$となる。

6 Appendix

6.1 対称的な遷移確率の場合

対称的な遷移確率

$$
\begin{aligned}
w(n_1, n_2 \to n_1 + 1, n_2) &= c_1 n_1 + f_1, \\
w(n_1, n_2 \to n_1, n_2 + 1) &= c_2 n_2 + f_2, \\
w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2) &= d_1 n_1, \\
w(n_1, n_2 \to n_1, n_2 - 1) &= d_2 n_2, \\
w(n_1, n_2 \to n_1 + 1, n_2 - 1) &= (a_2 n_1 + b_2) n_2, \\
w(n_1, n_2 \to n_1 - 1, n_2 + 1) &= (a_1 n_2 + b_1) n_1.
\end{aligned}
$$

に対して、$k_1, k_2, k_{11}, k_{22}, k_{12}$に対する式を求める：

$$
\begin{aligned}
\dot{k}_1 &= f_1 - (d_1 - c_1 + b_1)k_1 + b_2 k_2 + 2\alpha A_0, \\
\dot{k}_2 &= f_2 - (d_2 - c_2 + b_2)k_2 + b_1 k_1 - 2\alpha A_0, \\
\dot{k}_{11} &= f_1 - 2(d_1 - c_1 + b_1)k_{11} + (d_1 + c_1 + b_1)k_1 \\
&\quad + b_2(2k_{12} + k_2) + 4\alpha(k_1 k_{12} + k_2 k_{11}) + 2\beta A_0, \\
\dot{k}_{22} &= f_2 - 2(d_2 - c_2 + b_2)k_{22} + (d_2 + c_2 + b_2)k_2 \\
&\quad + b_1(2k_{12} + k_1) - 4\alpha(k_1 k_{22} + k_2 k_{12}) + 2\beta A_0, \\
\dot{k}_{12} &= -(d_1 - c_1 + b_1 + d_2 - c_2 + b_2)k_{12} + b_1(k_{11} - k_1) \\
&\quad + b_2(k_{22} - k_2) - 2\alpha(k_1 k_{12} + k_2 k_{11} - k_1 k_{22} - k_2 k_{12}) - 2\beta\lambda A_0. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ここで$A_0 = k_{12} + k_1 k_2, \alpha = (a_2 - a_1)/2, \beta = (a_2 + a_1)/2$である。

6.2 前の方程式との比較

前の方程式と今回の方程式を比較する。前のは

$$
\begin{aligned}
\dot{k}_1 &= 1 - n\gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2 + \gamma_1\gamma_2(m - n)A_0, \qquad (16) \\
\dot{k}_2 &= -(1 + m)\gamma_2 k_2 - (m - n)\gamma_1\gamma_2 A_0, \qquad (17) \\
\dot{k}_{11} &= 1 - 2n\gamma_1 k_{11} + \gamma_1\left(\frac{2}{\gamma} - n\right)k_1 + \gamma_2(2k_{12} + k_2) \\
&\quad + 2\gamma_1\gamma_2(m - n)(k_1 k_{12} + k_2 k_{11}) + \gamma_1\gamma_2\left(\frac{2}{\gamma} - (n + m)\right)A_0 \qquad (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{k}_{22} &= -2\gamma_2(1+m)k_{22} + \gamma_2\left(\frac{2}{\gamma} + 1 - m\right)k_2 \\
&\quad -2\gamma_1\gamma_2(m-n)(k_1k_{22} + k_2k_{12}) + \gamma_1\gamma_2\left(\frac{2}{\gamma} - (n+m)\right)A_0, && (19) \\
\dot{k}_{12} &= -[n\gamma_1 + (1+m)\gamma_2]k_{12} + \gamma_2(k_{22} - k_2) \\
&\quad -\gamma_1\gamma_2(m-n)(k_1k_{12} + k_2k_{11} - k_1k_{22} - k_2k_{12}) - \gamma_1\gamma_2\left(\frac{2}{\gamma} - (n+m)\right)A_0, && (20)
\end{aligned}
$$

であり、今回のを前のと同じ形にするには、

$$
\begin{aligned}
\dot{k}_1 &= 1 - (n+b)\gamma_1k_1 + \gamma_2k_2 + a\gamma_2A_0 && (21) \\
\dot{k}_2 &= -(m+1)\gamma_2k_2 + b\gamma_1k_1 - a\gamma_2A_0 && (22) \\
\dot{k}_{11} &= 1 - 2(n+b)\gamma_1k_{11} + \gamma_1\left(\frac{2}{\gamma} + b - n\right)k_1 + \gamma_2(2k_{12} + k_2) \\
&\quad +2a\gamma_2(k_1k_{12} + k_2k_{11}) + c\gamma_2A_0, && (23) \\
\dot{k}_{22} &= -2(m+1)\gamma_2k_{22} + \gamma_2\left(\frac{2}{\gamma} + 1 - m\right)k_2 + b\gamma_1(2k_{12} + k_1) \\
&\quad -2a\gamma_2(k_1k_{22} + k_2k_{12}) + c\gamma_2A_0, && (24) \\
\dot{k}_{12} &= -[(n+b)\gamma_1 + (m+1)\gamma_2]k_{12} + b\gamma_1(k_{11} - k_1) + \gamma_2(k_{22} - k_2) \\
&\quad -a\gamma_2(k_1k_{12} + k_2k_{11} - k_1k_{22} - k_2k_{12}) - c\gamma_2A_0. && (25)
\end{aligned}
$$

とし、

$$
a = \gamma_1(m-n), \quad c = \gamma_1\left(\frac{2}{\gamma} - (n+m)\right), \quad b = 0
$$

と置けば完全に一致する。new model では、$c = a$ と置きさえすればよい。