5/17/04
青木ノート

①

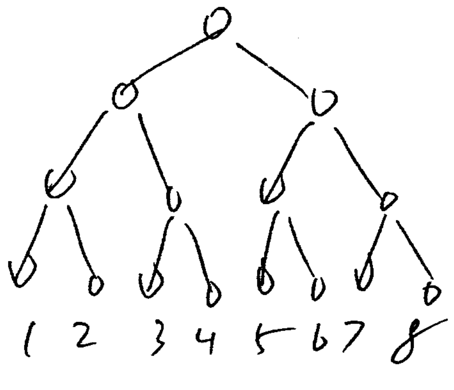
樹木のダイナミックス

Ref. A.T. Ogielski and D.L. Stein ('85) Physical Review Letters 1634–1637

(Aoki et al., (1996, ?, 2001))

(青木 (2003, 第2章))

$n=8$ の場合は



$\underline{p}=(p_1,\dots,p_8)$: 状態ベクトル

マスター方程式

$$\frac{d\underline{p}}{dt}=W\underline{p}\ ; \quad W=\left[\begin{array}{cc|cc|cccc} \epsilon_0 & \epsilon_1 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{E_2}} & & & & \\ \epsilon_1 & \epsilon_0 & & & \multicolumn{4}{c}{E_3} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{E_2}} & \epsilon_0 & \epsilon_1 & & & & \\ & & \epsilon_1 & \epsilon_0 & & & & \\ \hline & & & & \epsilon_0 & \epsilon_1 & \multicolumn{2}{c}{E_2} \\ \multicolumn{4}{c|}{E_3} & \epsilon_1 & \epsilon_0 & & \\ & & & & \multicolumn{2}{c}{E_2} & \epsilon_0 & \epsilon_1 \\ & & & & & & \epsilon_1 & \epsilon_0 \end{array}\right] : 8\times 8$$

ここで

$$E_2=\epsilon_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1,1) \quad : 2\times 2$$

$$E_3=\epsilon_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1111) \quad : 4\times 4$$

$$a_m=e^{-\beta\Delta_m}\ ; \quad \Delta_m=m\Delta \text{ を例として用いる.}$$

Wの固有値は

$$\lambda_m=2a_{m+1}+\sum_{m+2}^{n}a_k\ , \quad m<n-1$$

$$\lambda_{n-1}=2a_n$$

$$\lambda_0>\lambda_1>\cdots>\lambda_{n-1}>\lambda_n=0$$

← これは $p_1+p_2+\cdots+p_8=1$ による.

固有ベクトルも規則正しいパターンを有す

$$\underline{P}(t) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-\lambda_0 t}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{4}e^{-\lambda_1 t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{8}e^{-\lambda_2 t}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

初期条件として ρ_1 が外生的に確率1で外乱を受けたとする。$P_1(0) = 1$、この初期条件下のマスター方程式の解は

$P_1(t) = 2^{-8} + \cdots$ とかける。（次式の $n=3$ の場合）

より一般的には 2^n をその数として用いて

$$P_1(t) = 2^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} \exp(-m\ln 2)\left\{\exp(-2a_{m+1}t)\prod_{m+2}^{n}\exp(-a_i t)\right\} \quad (A).$$

$a_m = e^{-m\beta\Delta}$ として、この式を簡単化すると

$$P_1(t) = 2^{-n} + \frac{1}{2}\exp\left(\frac{R^{n+1}t}{1-R}\right)\sum_{m=0}^{n-1}\exp\left\{-m\ln 2 - \frac{2-R}{1-R}R^{m+1}t\right\}$$

ここで $R = e^{-\beta\Delta}$、$a_k = R^k$ となる。

この式は incomplete Γ 関数を用いると、$n\to\infty$ の場合

$$P_1(t) = -\frac{\ln 2}{\ln R}\left(R\frac{2-R}{1-R}\right)^{-\ln 2/\ln R} t^{-\ln 2/\ln R}\,\gamma\left(\frac{\ln 2}{\beta}, tR\left(\frac{2-R}{1-R}\right)\right)$$

とかける。（P11 鈴木参照）

$t\frac{R(2-R)}{1-R} = \xi$ とおくと、$P_1(t)$ の(1)式は　()の中の $\sum_{m=0}^{n-1}\cdots$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} e^{-R^m \xi} \simeq \xi^{\ln 2/\ln R}\, \gamma\left(-\frac{\ln 2}{\ln R}, \xi\right)$$

$$-\frac{\ln 2}{\ln R} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

となる。

更に $t \to \infty$ とすると

$$P_1(t) \to t^{-\ln 2/\beta} - O(e^{t}/t)$$

となり $P_1(t)$ が power law として 0に近づく（sluggish responseを示す）。

<u>参考</u>　$F(t) = C \cdot t^{-\alpha}$ という関係式は

$$F(\lambda t) = \mu F(t)$$

なら

$$\mu C t^{-\alpha} = C \lambda^{\alpha} t^{-\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}$$

というべき指数をもっている。

外乱が樹の上のノードを伝達して行く様子は $P_1(t)$ のみで分かる。

$$\langle d(t)\rangle := \sum_k d(k,1)P_k(t)$$

ここで $d(k,1)$ は site 1 と k の ultrametric 距離である、によっても示しうる。

$$\langle d(t)\rangle = (n-1) - \sum_{m=0}^{n-1}\left\{\exp(-2q_{m+1}t)\prod_{m+2}^{n} e^{-q_i t}\right\} + P_1(t)$$

となるから、$n\to\infty$ のもとでは、

$$\lim_{t\to\infty}\langle d(t)\rangle \sim \frac{1}{\beta}\ln t$$

となる。

樹のルートと site 1 の間の相関を直接求めても、数値の情報（site 1 の外乱が不全般に伝搬される時間プロファイル）が分る。

付録　Incomplete Γ function　　5/17/04 青木

定義

$$\gamma(a,x) := \int_0^x t^{a-1} e^{-t}\,dt$$

$$\gamma(a,x) \to \Gamma(a), \quad x \to \infty$$

↑ 通常のガンマ関数

γ(a,x)の級数展開式

$$\gamma(a,x) = e^{-x} x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+n+1)} x^n$$

$$= e^{-x} x^a \left(1 + \frac{1}{a+2} x + \frac{1}{(a+2)(a+1)} x^2 + \cdots \right)$$

Ref: Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computation, C.U.P.