97-J-2

Vasicek型期間構造モデルを用いた金利予測

東京大学大学院経済学研究科・経済学部　小林孝雄
ＣＳファースト・ボストン証券　越智顕洋

1997年3月

Vasicek型期間構造モデルを用いた金利予測[§]

1997 年 3 月

目次

東京大学大学院経済学研究科・経済学部　小林 孝雄

CSファースト・ボストン証券　越智 顕洋

§ 本論文は、東京金融先物取引所刊行の『金融先物論文集』(平成 8 年 9 月)に掲載された同著者の「タームストラクチャー・モデルによる金利予測」に加筆・修正を加えたものである。

Abstract

We compare two approaches to forecast future interest rates; (1)naive approach based on "the unbiased expectations hypothesis", and (2)an approach that incorporates investors' risk aversion. In particular, we use Vasicek's one-factor term structure model, which is the simplest model of interest rate movements that incorporates risk aversion of market participants and mean reversion of interest rates.

The main conclusion is two-fold. Firstly, the empirical evidence shows that there is a strong mean reversion in the Japanese interest rates and that its speed is much more sluggish than the US interest rates. Secondly, the use of Vacisek's model did not improve the predictive power of current market data significantly. The evidence strongly suggests the need to use a multiple-factor model to improve the fit to the observed yield curve and the predictive ability of the model for future interest rate movements, if the market data contains any information.

1. はじめに

フォワード・レートは将来の金利変動に対して予測力を有するか？ Fama(1984)、Mishkin(1988)は米国財務省証券(T-Bill)を使って半年未満の短期予測について、Fama(1987)は米国国債を使って1～4年の長期予測についてこれを調べている。その結果、フォワード・レートには、短期・長期の何れについても、ある程度の予測力があると結論している。また同時に、予測期間が長くなるほど、つまり、短期よりも長期において予測力は増すと述べている。しかし、常識的に考えて、短期に比べて長期の予測力が高いというのは奇妙な現象である。Fama(1987)は、その原因が金利のミーン・リバージョンにあるとしている。

一方で、フォワード・レートは、リスク・プレミアムを含んでいる可能性がある。そのプレミアムが時間の経過とともに変化しないならば、フォワード・レートによる金利予測は影響を受けないと考えられるが、もし変化するならば、金利予測に重大な影響を及ぼすと考えられる。

本論文では、ミーン・リバージョンおよびリスク・プレミアムを考慮した金利予測を行った場合に、フォワード・レートによる予測に比べて、その予測精度が向上するか否かを調べる。ミーン・リバージョンとリスク・プレミアムを予測に取り入れるために、金利の期間構造モデルとして最もポピュラーな Vasicek(1977) の金利モデルを利用する。分析対象は円金利で、東京金融先物取引所(TIFFE)に上場されているユーロ円金利先物価格データを利用する[1]。厳密には、先物価格(Futures Price)と先渡価格(Forward Price)は一致しないが、本論文では、その差を無視し、金利先物価格とフォワードレートが同一であるものと考えることにする[2]。

本論文の構成は次の通りである。2節で Fama(1984)、Mishkin(1988)と同様の分析を行い、金利先物が将来金利の予測力を持つかテストする。3節では、Vasicek モデルを利用した金利予測の準備として、モデルのパラメータを金利先物データからどのように推定できるのか説明する。Chen and Scott(1993)、Pearson and Sun(1994)がクロスセクションデータと時系列データの両方を同時に使い、Cox=Ingersoll=Ross モデルのパラメータの最尤推定を行っている。クロスセクションデータと時系列データの両方を使うことにより、リスクの市場価格 λ を推定することができる。Chen and Scott(1993)の方法を Vasicek モデルの推定に応用する。4節

---

[1] ユーロ円金利先物は、ユーロ円オファー金利3ヶ月物を対象とする先物契約で、金融機関・事業会社の短期金利をヘッジする手段として、あるいは、投機の対象として活発に利用されている。また、先物の対象であるユーロ円金利は最近特にその重要性を増しつつある。なぜなら、変動貸出金利が Libor・Tibor ＋スプレッドという形式で決定されるケースが増加してきているからである。このような背景から、金利先物市場は、数多くの主体が参加する流動性の非常に高いマーケットへと成長した。

[2] ロンドン・インターバンク市場のユーロ円オファー金利が Libor 、東京インターバンク市場のそれが Tibor である。従って、ユーロ

でその推定結果を示す。5節では Vasicek モデルによる予測を、予測日の3ヶ月金利そのものを将来の3ヶ月金利の予測値とするナイーブな予測と、金利先物による予測と比較する。予測能力の評価は、平均二乗誤差の平方根と、Fama(1984)、Mishkin(1988)の方法の2つの観点から行う。6節で結論を述べる。

2. フォワードレートの金利予測力

Fama(1984)、Mishkin(1988)、Fama(1987)による分析の枠組みを説明する。時点sにおけるt年フォワードの3ヶ月金利をf(t,s)、残存t年の債券価格をp(t,s)で表すと、

$$f(t,s) = -4 \cdot \log \frac{p(t+0.25,s)}{p(t,s)}$$

$$= -4 \cdot \log p(t+0.25,s) + 4 \cdot \log p(t,s) \qquad (1)$$

である。また、時点tから時点t+τまで残存T年の債券を所有した場合の収益率(年率)をh(T;t,t+τ)で表すと、

$$h(T;t,t+\tau) = \frac{1}{\tau}\left\{\log p(T-\tau,t+\tau) - \log p(T,t)\right\}$$

となる。時点tの3ヶ月金利をy(t)で表すと、

$$p(\tau+0.25,t) = \exp\left[-\tau \cdot E_t(h(\tau+0.25;t,t+\tau)) - 0.25 \cdot E_t(y(t+\tau))\right] \qquad (2)$$

(2)式を(1)式に代入して、両辺からy(t)を引くと、

$$\begin{aligned} & f(\tau,t) - y(t) \\ & = \left\{E_t(y(t+\tau)) - y(t)\right\} + 4\tau \cdot \left\{E_t(h(\tau+0.25;t,t+\tau)) - x(\tau,t)\right\} \end{aligned} \qquad (3)$$

円金利先物は、Libor・Tibor の先物契約と考えて差し支えない。

ただし、$x(\tau,t)=-\frac{1}{\tau}\log p(\tau,t)$

となる。上式から、フォワードレートと3ヶ月金利の差(左辺)が、時点tから時点t＋τまでの間の3ヶ月金利の変化の期待値(右辺第一項)を含んでいることがわかる。そこで、

$$y(t+\tau)-y(t)=\alpha+\beta\cdot\big(f(\tau,t)-y(t)\big)+\varepsilon(t+\tau) \tag{4}$$

という回帰式を考える。また、(3)式は、事後的に次のように成立する。

$$f(\tau,t)-y(t)=\{y(t+\tau)-y(t)\}+4\tau\cdot\{h(\tau+0.25;t,t+\tau)-x(\tau,t)\} \tag{5}$$

(5)式と(4)式から、

$$4\tau\cdot\{h(\tau+0.25;t,t+\tau)-x(\tau,t)\}=-\alpha+(1-\beta)\big(f(\tau,t)-y(t)\big)-\varepsilon(t+\tau)$$

である。従って、(4)式のβは、フォワード・レートと3ヶ月金利のスプレッドを、①金利の期待変化と ②τ期間収益率のプレミアム((3)式右辺第二項)に分解する割合である。(4)式では、βは一定であるから、(4)の回帰式は、時間の経過を通じて、プレミアムがスプレッドの変化に対して一定の割合で変化することを前提としている。

本節では、(4)式により、フォワードレートの将来金利に関する予測能力をテストする[3]。Fama(1984)は、(4)式の回帰をOLSによって行っているが、Mishkin(1988)は、誤差項に系列相関・不等分散性が存在する場合には、係数推定値の標準誤差がOLSのそれとは異なることを指摘している。実際、(4)式の回帰分析をするにあたって、説明・被説明変数のデータ・セットは3ヶ月毎のものを使用するが、τが3ヶ月を越える場合には、データのオーバーラップが原因で系列相関が発生する。例えば、τが6ヶ月の場合であれば、誤差項が1次の、12ヶ月であれば3次の移動平均過程に従うと考えられる。そこで、本論文では、τが3ヶ月以内のケースではOLSを使い、τが3ヶ月を越えるケースでは、Mishkin(1988)に従い、Newey and West(1987)による分散共分散行列を用いることにする。彼らによる係数推定値の分散共

[3] これ以後の全ての回帰分析について、RATS Version4.0 を使用した。

分散行列Vは次のようになる。

$$V = (X'X)^{-1} X'\Omega X(X'X)^{-1}$$

ただし、観測数をTで表す時、

X: 定数と(4)式の説明変数からなるT×2の行列

Ω: $\omega(i,j)$を要素とするT×Tの行列

$$\begin{aligned}\omega(i,j) &= \left\{1-\frac{p}{q+1}\right\}\varepsilon_i\varepsilon_j \quad & if\ p \le q \\ &= 0 & otherwise\end{aligned}$$

$p = |i-j|$,　　q : 移動平均過程の次数

ε : OLSで推定した場合の残差

また、係数推定値を一括して検定する場合、帰無仮説を$\gamma = \gamma^*$とすると、

$$(\gamma - \gamma^*)V^{-1}(\gamma - \gamma^*)$$

が漸近的に自由度2のカイ2乗分布に従う性質を利用することができる。これは5節において使われる。

◇分析に使用したデータ

ユーロ円金利先物は1989年6月末に上場されているが、5節の分析との比較のため、最初の1年分のデータを本節の分析では使わず、1990年7月～1995年9月までの週次データを利用した。現在では12限月までの取引が行われており、約3年先の3ヶ月金利を取引することができる。しかし、上場後しばらくは、せいぜい4限月までしか取引が行われていなかったため、期近の4限月を使うことにした。それでもなお3・4限月目の先物は取引が行われない日もしばしばあり、終値に代えて清算価格を分析に用いた。実際の取引価格ではない清算価格を分析に用いることに問題があると思われるかもしれないが、清算価格と終値にはほとんど差がなく、特に問題がないと判断した。

また、現物の3ヶ月金利としては、ユーロ円オファー金利3ヶ月物の終値を利用する。日次のデータをデータ・ストリームから得ることができた。

◇分析の具体的な方法

(3)式の τ =0.25・0.5・0.75・1.0 年のケースについて α・β を推定する。金利先物の満期日が3・6・9・12月の第三水曜日(15～21日の間になる)であることから、毎年3・6・9・12月の15日を越えて最も近い(週次データが該当する)日の先物価格を1限月目は τ =0.25、2限月目は τ =0.5、3限月目は τ =0.75、4限月目は τ =1.0のフォワード・レートとして扱った。予測日の3ヶ月金利は先物データが得られた日と同一日のデータを使い、先物満期日の3ヶ月金利は、先物満期日を一つ一つ調べた上で該当する日の3ヶ月金利を使った。

先述のように、τ =0.25 の場合はOLSで、τ =0.5・0.75・1.0 の場合は Mishkin(1988)に従った。

◇推定結果

回帰分析の結果は表1のようになる。α・β の推定値は τ =0.25 のケースの β を除いて全て有意となった。R2も予測期間が3ヶ月の場合(τ =0.25)を除けば、0.3以上で比較的高いように思われる。Fama(1987)、Mishkin(1988)の結果と比較してもR2は予想外に高い。Fama(1987)によれば、フォワードレートが将来金利の予測力を持つと言いながらも、少なくとも τ =1.0年についてはR2が0で、α・β は有意になっていない。Mishkin(1988)についても、

τが3ヶ月以内のケースでは、R2が0.17～0.26で係数推定値も有意となっているが、τが4・5ヶ月のケースでは、R2はほとんど0で係数推定値は有意になっていない。

以上から、円金利については、米国金利よりもフォワード・レートの予測力が高いと言える。しかし、1年以内の予測期間においては、Fama(1987)が指摘したような、予測期間が長くなればなるほど予測力が増す、あるいはR2が大きくなるという傾向は観察されなかった。ただし、安達(1994)は日本の国債市場のデータを使って、より長期(半年～7年)の予測について同様のテストを行っているが、予測期間が長くなるほどR2は上昇すると報告している。従って、ミーン・リバージョンを考慮することによって、予測力が更に向上する可能性は十分残されていると考えられる。

図1は、金利先物による予測値と、実現した3ヶ月金利をグラフ化したものである。

表1 回帰分析の結果[4]

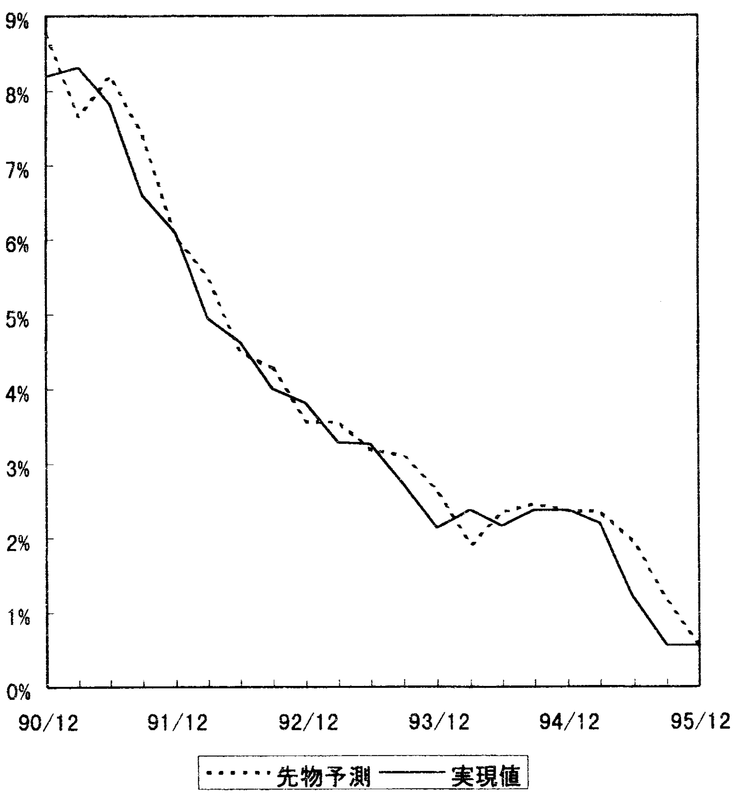
予測期間	サンプル数	α	β	R2
3ヶ月	21	−0.0026* (0.0010)	0.56 (0.32)	0.14
6ヶ月	20	−0.0053* (0.0014)	0.81* (0.22)	0.37
9ヶ月	19	−0.0096* (0.0020)	0.84* (0.21)	0.40
12ヶ月	18	−0.0145* (0.0025)	0.75* (0.28)	0.32

注. ()内は標準誤差、*印は5%有意

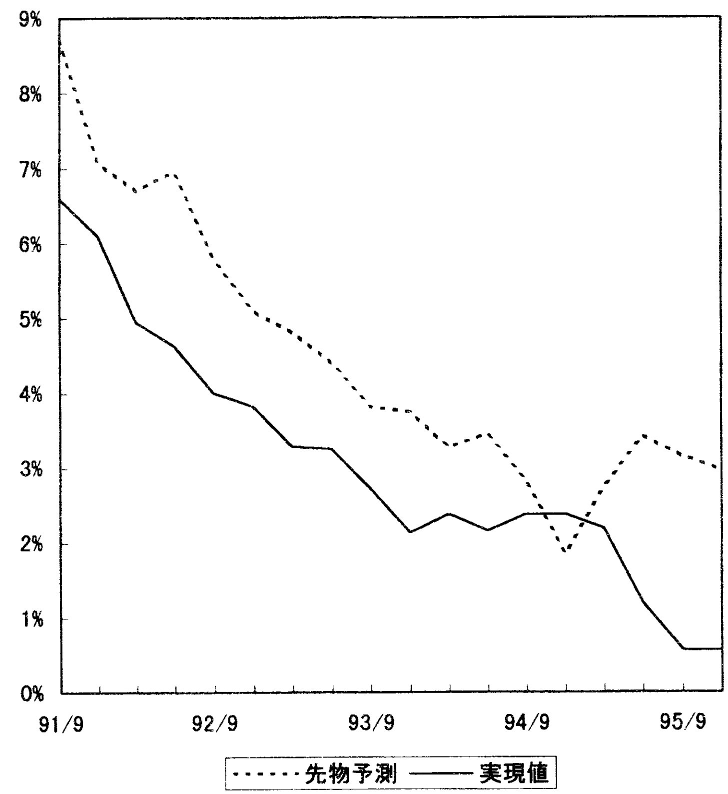
[4] αの表示は、1%ならば0.01という形式になっている。

図1　金利先物による予測値と実現した3ヶ月ユーロ円金利

τ ＝0.25年



τ ＝1.0年



3. Vasicek モデルのパラメータ推定

Vasicek モデルによる金利の期待値を求めるために、まず、モデルのパラメータを推定しなければならない。CIRモデルのパラメータ推定を行った Chen and Scott(1993)の方法を使って、4つの限月の金利先物時系列データから最尤法でパラメータを推定する。

Vasicek モデルは、①リスクの市場価格 λ が一定、②スポットレートが(6)式で表現される Ornstein-Uhlenbeck 過程に従うという仮定を置いている。

$$dr = c \cdot (m - r) \cdot dt + \sigma \cdot dZ \tag{6}$$

この時、残存T年の債券価格p(T)は、

$$p(T) = A(T) \cdot \exp(-B(T) \cdot r) \tag{7}$$

ただし、$A(t) = \exp(\frac{(B(t) - t) \cdot (c\phi - \sigma^2/2)}{c^2} - \frac{\sigma^2 B(t)^2}{4c})$

$$B(t) = \frac{1 - \exp(-ct)}{c}$$

$$\phi = cm - \lambda\sigma$$

となる。(6)式から、rの分布が

$$r(t + \Delta t) | r(t) \sim N(\mu_r, s^2)$$

$$\mu_r = m + (r(t) - m) \cdot \exp(-c \cdot \Delta t)$$

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{2c}(1 - \exp(-2c \cdot \Delta t))$$

となっていることがわかる。

(7)式から、t年フォワードの3ヶ月（0.25年）金利f(t)は、スポットレートrを使って、

$$f(t) = -4 \cdot \log \frac{p(t+0.25)}{p(t)}$$

$$= -4 \cdot \left(\log p(t+0.25) - \log p(t) \right)$$

$$= 4 \cdot \left\{ -\left(\log A(t+0.25) - \log A(t) \right) + \left(B(t+0.25) - B(t) \right) \cdot r \right\}$$

$$= 4 \cdot \left(-a(t) + b(t) \cdot r \right) \tag{8}$$

ただし、$a(t) = \log A(t+0.25) - \log A(t)$,　$b(t) = B(t+0.25) - B(t)$

と表される。一般に、フォワード・レートと先物レートは一致しないが、今回の分析では、一致するものと考える。(8)式を使うことによって、スポットレートrから先物金利を計算することができる。ところが、4つの限月それぞれについて、実際の先物金利と一致するようなrが存在するとは限らない。そこで誤差項uを導入した次のようなモデルを考える。先物金利をf(t)で表し、

$$\begin{aligned}
f_1(t_1) &= 4 \cdot \left(-a(t_1) + b(t_1) \cdot r \right) \\
f_2(t_2) &= 4 \cdot \left(-a(t_2) + b(t_2) \cdot r + u_1 \right) \\
f_3(t_3) &= 4 \cdot \left(-a(t_3) + b(t_3) \cdot r + u_2 \right) \\
f_4(t_4) &= 4 \cdot \left(-a(t_4) + b(t_4) \cdot r + u_3 \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし、$f_i(t_i)$: 先物金利、 t_i : 先物の満期までの期間

誤差項は、次のように、一階の自己回帰過程に従い、互いに相関をもつが、rとは無相関であると仮定する。

$$u_i(t+1) = \phi_i \cdot u_i(t) + \varepsilon_i(t+1) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \quad Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij}$$

r、uの条件付分布は、4次元正規分布に従うから、その密度関数は、

$$g(r(t+\Delta t), u(t+\Delta t) | r(t), u(t)) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{|\Sigma|}} \cdot \exp(-Q/2)$$

ただし、$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ 0 & \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)'$$

$$x = (r(t+\Delta t), u_1(t+\Delta t), u_2(t+\Delta t), u_3(t+\Delta t))$$

$$\mu = (\mu_r, \phi_1 u_1(t), \phi_2 u_2(t), \phi_3 u_3(t))$$

となる。t＝0,...,T の観測値r,u についての（ $u(0)$に関する条件付）対数尤度関数Lは、

$$L_r = \log h(r(0)) + \sum_{t=0}^{T-1} \log g(r(t+1), u(t+1) | r(t), u(t))$$

ただし、$h(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_0} \exp(-\frac{(r-m)^2}{2s_0^2})$

$$s_0^2 = \frac{\sigma^2}{2c}$$

となる。r、uからf、uへの変換のヤコビアンJは

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial r} & \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} & \frac{\partial f_4}{\partial u_3} \end{vmatrix}^{-1} = 4^{-4} \times \begin{vmatrix} b(t_1) & 0 & 0 & 0 \\ b(t_2) & 1 & 0 & 0 \\ b(t_3) & 0 & 1 & 0 \\ b(t_4) & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = 4^{-4} \cdot b(t_1)^{-1}$$

である。従って、r, uで表された対数尤度関数をf、uで書き直すと、

$$L_f(f(0),\ldots,f(T),u(0),\ldots,u(T))$$
$$= L_r(r(0),\ldots,r(T),u(0),\ldots,u(T)) - \sum_{s=0}^{T} \log\left|b(t_1(s))\right| + const.$$

となる。ただし、$t_1(s)$はt時点での先物満期までの年数を表している。この関数を以下の13個のパラメータについて最大化する。

$$c, m, \lambda, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$$

ただし、

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}$$

この非線形の最大化問題を準ニュートン法で解く[5]。なお、推定量の標準誤差を求めるにあたっては、対数尤度関数の2階微係数に－1を掛けたものを要素とする行列の逆行列Hの対

[5] 最大化問題は、IMSL（数値計算用ライブラリー）を使って、C++でプログラムを作成し、解を得た。

角成分を用いる[6]。

$$H = \left(-\frac{\partial^2 L_f(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_i \partial \hat{\theta}_j} \right)^{-1}$$

$\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_j$: パラメータの推定量

4. Vasicek モデルの推定結果

ここでは、2節とは異なり、1989年7月～1995年11月までの利用可能な全期間の週次データを用いる。期近の4限月の金利先物の清算価格データを用いるのは2節と同様である。この期間のデータ数は 1280(320日×4)個であった。

ここで推定されたパラメータが金利の予測値(期待値)を求めるために使われることから、

サンプル期間1:1989年7月～1990年9月

サンプル期間2:1989年7月～1990年12月

・　　・

・　　・

・　　・

サンプル期間21:1989年7月～1995年9月

というように、1990年9月以降の3・6・9・12月15日を越える最初の週次データまでを使って、21通りの推定量を計算した。従って、推定に用いたデータ数は、最小でサンプル期間1の248(62日×4)個、最大でサンプル期間21の1280個であった。

(9)式のモデルにおいて、1本目の式を2限月目の先物に使い、2本目を1限月目、3本目を3限月目、4本目を4限月目の先物に使った。これは、2限月目の先物が一般に最も取引量が多く流動性があると思われるからである。従って、u1は第1限月の誤差、u2は第3限月の誤差、u3は第4限月の誤差ということになる。第2限月にはもちろん誤差がない。

---

[6] Hamilton(1994)p.143参照

◇推定結果

パラメータの推定結果の一部を表2、表3に示す。もちろん、表2、表3に示した以外の推定量も次節の金利予測で用いられる。まず、Vasicek モデル固有のパラメータ(表2)について考える。cが、89/7～91/6を除けば有意になっている。全てのサンプル期間について見た場合でも、サンプル期間7～21においてcは有意となっている。これは、金利のミーン・リバージョンの存在を示していると言える。しかし、cの大きさは0.15～0.20と小さい。Chen and Scott(1993)では、米国金利におけるcの推定量は0.62となっており[7]、日本のそれはかなり小さいと言える。cが0.15ということは、instantaneous spot rate とmの差が半分になるまでに4.6年かかることを意味しており、ミーン・リバージョンのスピードが非常に遅いと言える。

mについては、cと同様で、cが有意ならばmも有意になった。これは直感的にも当然のことであると思われる。唯一の例外はサンプル期間6で、この期間については、cが有意でないにもかかわらずmは有意であった。λについては、サンプル期間1・2を除けば、有意にならず、リスク・プレミアムの存在を確認することはできなかった。もし、λ＝0ならば、Vasicek モデルから導かれる3ヶ月金利の期待値は、金利先物価格とほぼ等しくなり[8]、Vasicek モデルの期待値を敢えて金利予測に用いることと金利先物を用いることに意味はない。σについては、全ての期間について有意となり、その値も1.00%から1.25%と比較的安定していた[9]。

---

[7] Chen and Scott(1993)は、1980年～1988年の13週・26週財務省証券、5年・30年国債の4つの金利の週次データを使ってCIRモデルのパラメータを推定している。

[8] 残念ながら、式の上では証明できていないが、実際に期待値を計算するとこれは明らかである。

[9] 筆者は、金利オプションのIV(Black=Scholes モデルを前提としている)の推移を見ているかぎり、金利のボラティリティーが金利の水準にそれほど依存していないと感じていた。なぜなら、金利が上昇すればIVが下落し、金利が下落すればIVが上昇する傾向が見られたからである。今回の結果は、この事実を説明する一助となるかもしれない。

表2. Vasicek モデルのパラメータ推定結果

観測期間	c	m	λ	σ
89/7～91/6	0.0642 (0.0542)	0.0659 (0.0338)	0.3089 (0.1843)	0.0125* (0.0010)
89/7～92/6	0.2029* (0.0613)	0.0528* (0.0172)	0.0839 (0.3097)	0.0124* (0.0009)
89/7～93/6	0.1446* (0.0475)	0.0469* (0.0181)	0.1611 (0.2865)	0.0110* (0.0007)
89/7～94/6	0.1402* (0.0334)	0.0437* (0.0161)	0.0015 (0.2645)	0.0108* (0.0005)
89/7～95/6	0.1531* (0.0324)	0.0364* (0.0156)	−0.0889 (0.2514)	0.0104* (0.0005)

注. ()内は標準誤差、*印は5%有意

表3 (4)式に現れないパラメータの推定結果

観測期間	$\sigma 1$	$\sigma 2$	$\sigma 3$	$\Phi 1$	$\Phi 2$	$\Phi 3$	$\rho 12$	$\rho 13$	$\rho 23$
89/7～91/6	0.000227	0.000157	0.000214	0.89	0.74	0.70	−0.50	−0.42	0.73
	(0.000017)	(0.000012)	(0.000015)	(0.034)	(0.051)	(0.064)	(0.082)	(0.087)	(0.050)
89/7～92/6	0.000227	0.000166	0.000240	0.94	0.84	0.86	−0.50	−0.42	0.79
	(0.000013)	(0.000010)	(0.000014)	(0.022)	(0.032)	(0.040)	(0.062)	(0.068)	(0.031)
89/7～93/6	0.000215	0.000170	0.000251	0.94	0.84	0.89	−0.53	−0.46	0.82
	(0.000011)	(0.000009)	(0.000013)	(0.020)	(0.029)	(0.037)	(0.051)	(0.056)	(0.023)
89/7～94/6	0.000207	0.000161	0.000238	0.94	0.85	0.87	−0.55	−0.48	0.83
	(0.000009)	(0.000007)	(0.000011)	(0.017)	(0.025)	(0.030)	(0.044)	(0.049)	(0.020)
89/7～95/6	0.000195	0.000153	0.000227	0.94	0.88	0.91	−0.54	−0.47	0.83
	(0.000008)	(0.000006)	(0.000009)	(0.016)	(0.021)	(0.021)	(0.041)	(0.045)	(0.017)

注. ()内は標準誤差

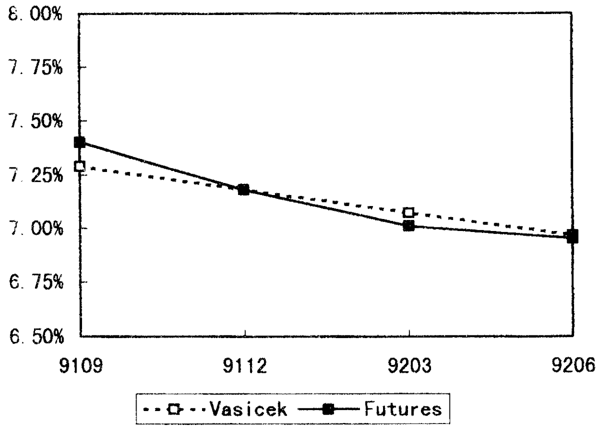
(4)式に現れないパラメータ(表3)については、全て有意となった。これらのパラメータを使って、Vasicek モデルのフィットについてチェックする。図2は、推定されたパラメータから計算される金利先物レートと実際の先物レートをグラフで表したものである。この図から明らかなように、Vasicek モデルの実際の先物価格に対するフィットは非常に悪い。例えば、図2(c)に該当するサンプル期間 89年7月～94年6月のケースでは、σ1～σ3の推定量は、それぞれ 0.000207、0.000161、0.000238 となっているが、これをu1～u3の標準偏差に直し、年率換算[10]すると24ベーシス、12ベーシス、19ベーシスになる。この数字、つまりフィットの悪さが(c)のグラフにもはっきりと現れている。1ファクターモデルの限界は、Chen and Scott(1993)を含め数多くの文献が指摘しているところであるが、やはり、モデルのフィットを向上させるために、少なくとも2ファクターモデルを用いるべきであるかもしれない。

最後に、instantaneous spot rate の推移について見ておきたい。図3は、サンプル期間89年7月～95年9月の推定量から計算された instantaneous spot rate の変化である。参考のために、図4に3ヶ月金利の推移も示す。図3・図4に引かれた直線は平均金利である。図3からは、金利が平均金利を中心として上昇・下降・上昇という典型的なパターンをとっていることが見て取れる。しかし、パラメータを推定するための最大のサンプル期間でさえも、その周期がたった1度しか現れておらず、サンプル数が不十分であったことは否定できない。

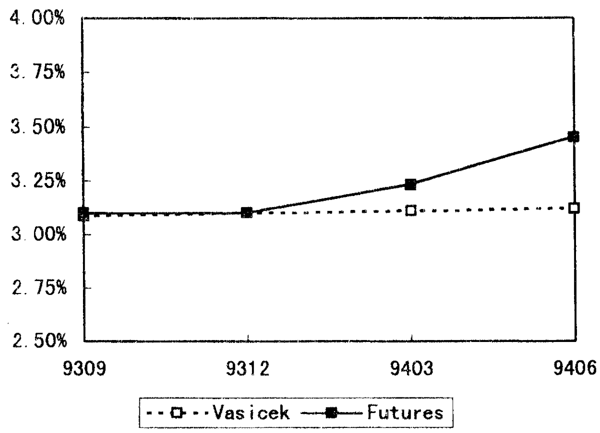
[10] σ1～σ3はu1～u3の条件付標準偏差。金利は全て年率表示なので、u1～u3の標準偏差を4倍にする。

図2 Vasicek モデルのフィット

(a) 91年6月（サンプル期間：89年7月～91年6月）



(b) 93年6月（サンプル期間：89年7月～93年6月）



(c) 94年6月（サンプル期間：89年7月～94年6月）

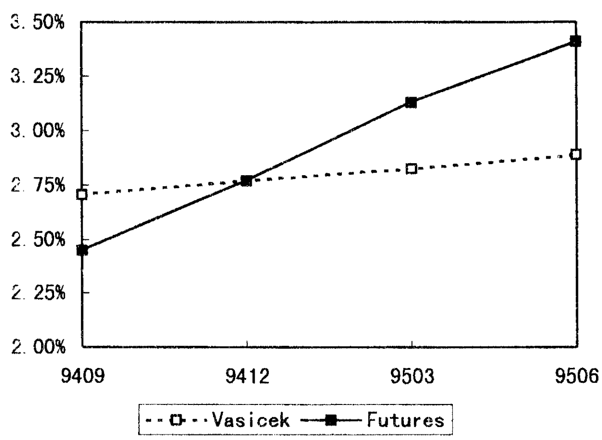


図3 Instantaneous Spot Rate の変化と平均金利m

（サンプル期間: 89年7月～95年9月）

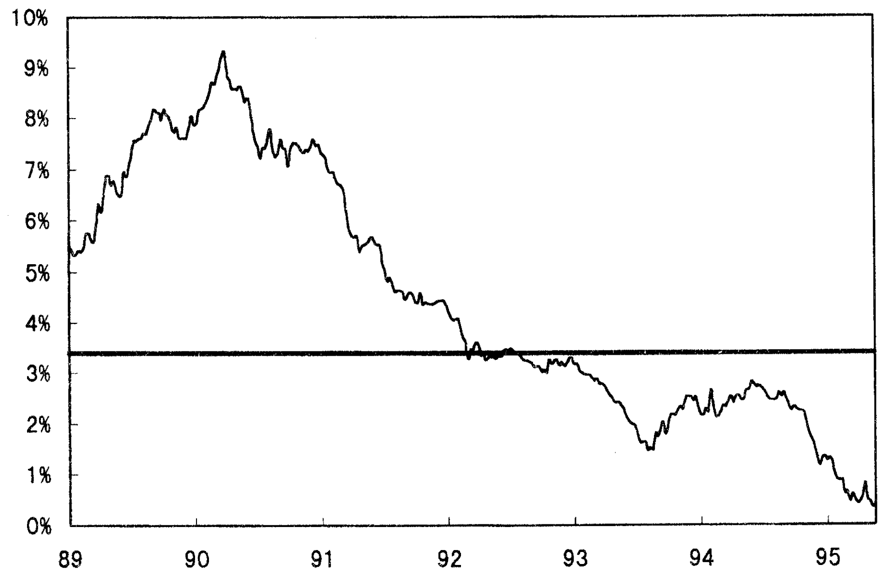
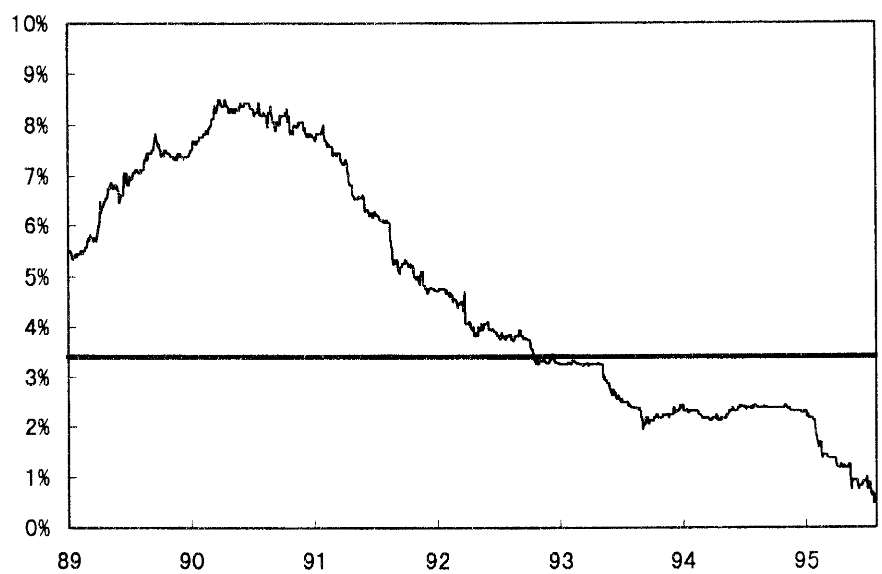


図4 3ヶ月金利の変化と平均金利[11]



[11] 平均金利は89年7月～95年9月のサンプル期間から計算された値。

5. 金利予測のパフォーマンス

Vasicek モデルから導かれる3ヶ月金利の期待値は、(7)式から、

$$
\begin{aligned}
E\left[y(t+\tau)\middle|r(t)\right] &= E\left[-4\cdot\log p(t+\tau,0.25)\middle|r(t)\right] \\
&= E\left[-4\cdot\left(A(0.25)-B(0.25)\cdot r(t+\tau)\right)\middle|r(t)\right] \\
&= -4\cdot A(0.25)+4\cdot B(0.25)\cdot E\left[r(t+\tau)\middle|r(t)\right] \\
&= -4\cdot A(0.25)+4\cdot B(0.25)\cdot\left\{m+\left(r(t)-m\right)\cdot\exp(-c\tau)\right\}
\end{aligned}
$$

と計算できる。

Ⅰ. 平均二乗誤差の平方根による予測力の判定

まず、Vasicek モデルの期待値の予測力を、次のように計算される平均二乗誤差の平方根の大きさを使って評価する。

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t}\left(\hat{y}(t+\tau)-y(t+\tau)\right)^{2}}$$

N :サンプル数

$y(s)$: sで実現した3ヶ月金利

$\hat{y}(s)$: sで実現する3ヶ月金利の予測値

①3ヶ月金利(ナイーブ予測)、②金利先物を予測値として使った場合と③Vasicekモデルによる予測の予測誤差を比較することで、予測の精度をチェックする。データは2節と4節で用いたものと同じであるが、4節で推定したパラメータを基に Vasicek モデルの期待値が計算される。

◇分析結果

結果を表4に示す。全ての τ について、平均二乗誤差の平方根の大きさは①>③>②の

順番になり、②と③には大きな差が観察されなかった。従って、ミーン・リバージョンおよびリスク・プレミアムを考慮した予測値をもってしても予測力の向上は見られなかった。あるいは、Vasicek モデルでは、ミーン・リバージョンおよびリスク・プレミアムの構造を十分説明できなかったと考えられる。

しかし、必ずしも、Vasicek モデルの予測値と金利先物レートが近い値となっていたわけではないことが図5からわかる。図5は、予測誤差の度数分布を$\tau=0.25$・1.0 のケースについて作成したものである。$\tau=0.25$ のケースでは、Vasicek モデルによる予測誤差が25ベーシスを中心とした山になっているのに対し、金利先物による予測誤差は0ベーシスと50ベーシスの2つの頂上をもつ山となっていることから、合計では誤差がほぼ等しくなっているが、分布は一致していない。

また、$\tau=1.0$のケースでは、図4から、全ての予測値に関して、予測誤差の分布が大きく正の方向に偏っていることもわかる。図5から、予測値が金利の低下に追随している様子が観察される。従って、いずれの予測値についても不偏性を満たしていないことが推測される。

表4 平均二乗誤差の平方根

予測方法	3ヶ月	6ヶ月	9ヶ月	12ヶ月
①3ヶ月金利	0.54%	0.97%	1.42%	1.81%
②金利先物	0.42%	0.67%	1.11%	1.61%
③ Vasicek モデル	0.47%	0.73%	1.18%	1.61%

Ⅱ. 回帰分析による判定

次に、2節と同様に、次のような回帰分析を使って、Vasicek モデルによる予測を金利先物(フォワード・レート)による予測と比較する。

$$y(t+\tau)-y(t)=\alpha+\beta\cdot\left(\hat{y}(t+\tau)-y(t)\right)+\varepsilon(t+\tau)$$

$y(s)$：時点sで実現した3ヶ月金利

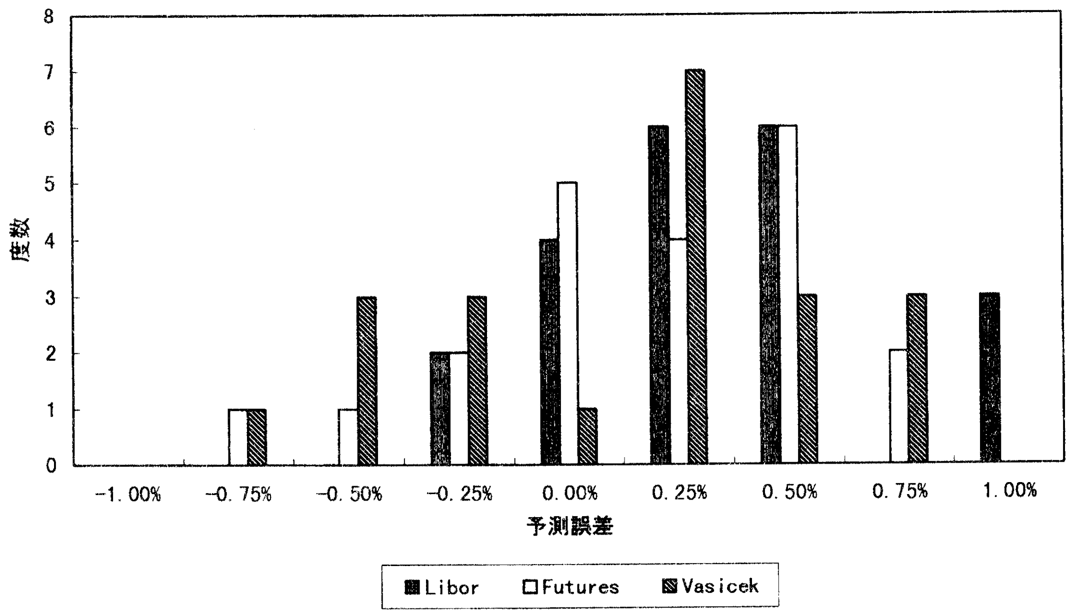
$\hat{y}(s)$：時点sで実現する3ヶ月金利の予測値

（Vasicek モデルによる期待値）

ただし、ここでは、Vasicek モデルによる予測の不偏性も同時にテストする。2節で説明したように、τ =0.25 の場合にはF検定を、データのオーバーラップによる誤差項の系列相関を考えなければならない τ =0.5・0.75・1.0 の場合は、Mishkin(1988)によるカイ二乗検定を行って α =0、β =1をテストする。これ以外は2節と全く同じ段取りである。

図5 予測誤差(予測値－実現値)の度数分布

τ ＝0.25年



τ ＝1.0年

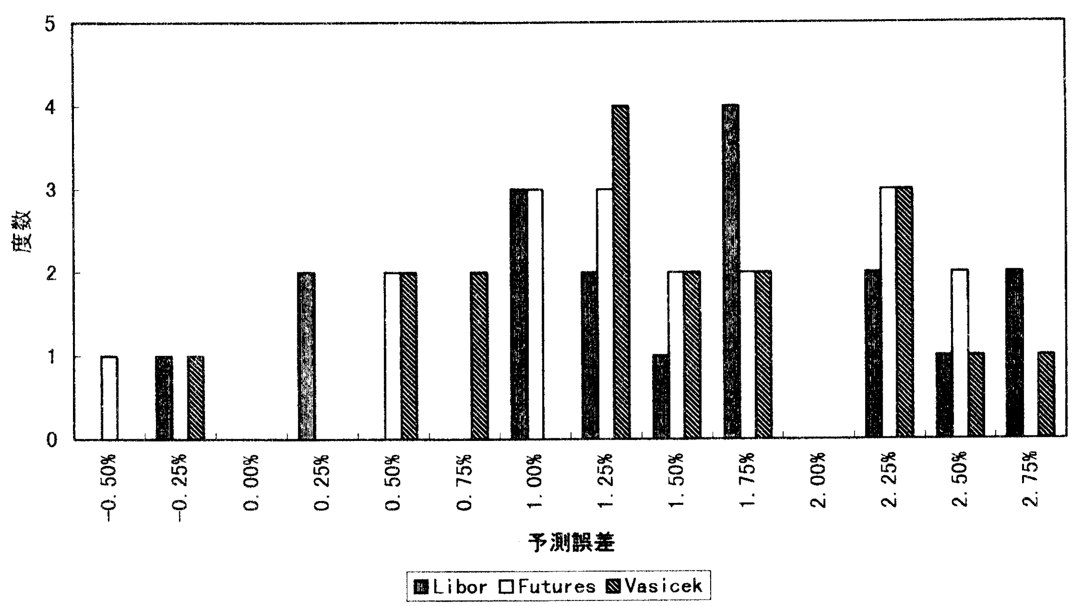
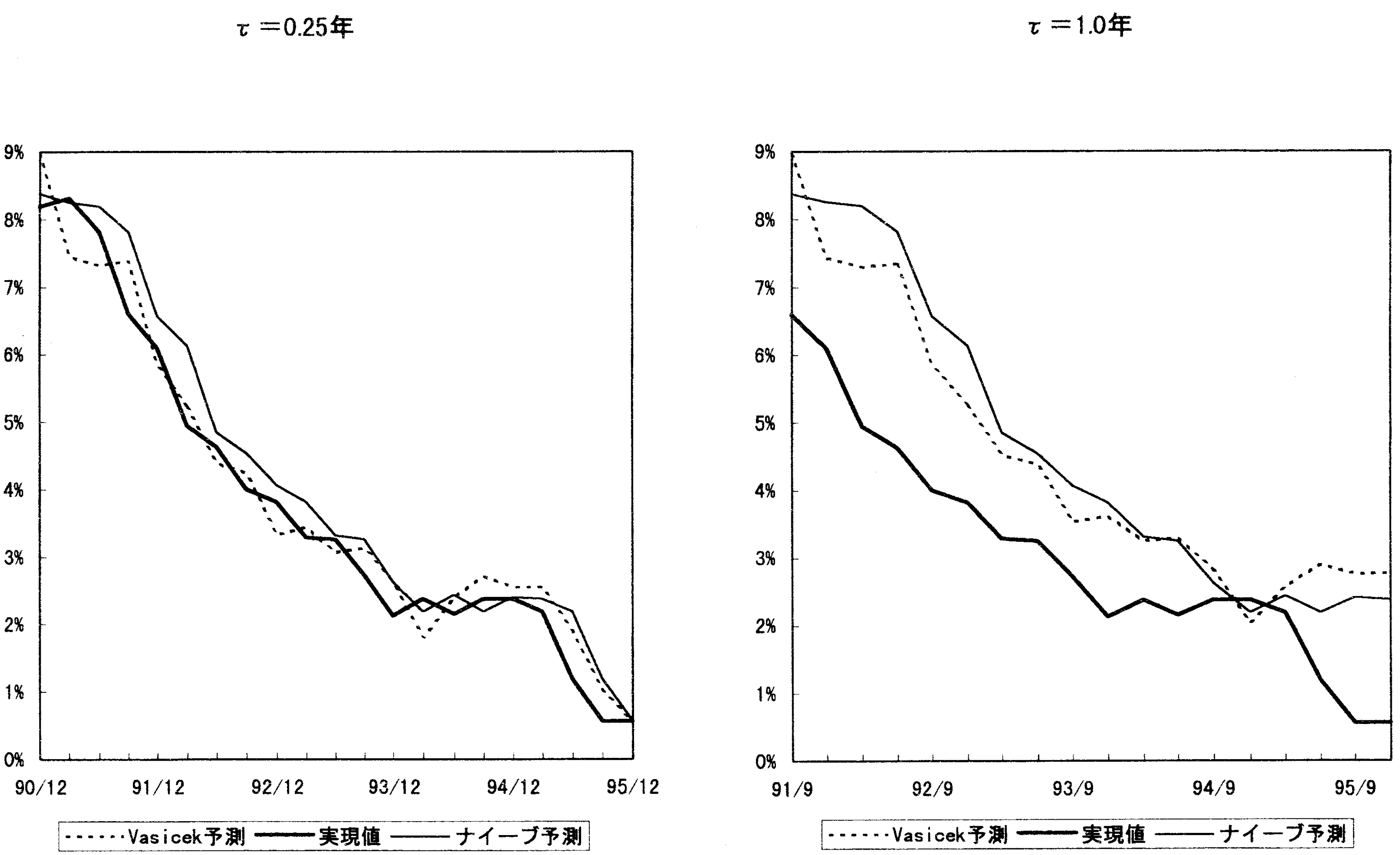


図6 Vasicek モデルによる予測値、ナイーブな予測値、実現した3ヶ月ユーロ円金利



◇分析結果

結果を表5に示す。α・βは、τ＝0.25のβを除いて、全て有意となった。これは、金利先物の回帰結果と全く同じである。また、R2についても、金利先物のケースとほぼ等しい数字となっている。これらを見る限り、Vasicek モデルを利用することによって、予測力は改善されていない。しかし、βの推定値については、τ＝0.75・1.0に関して、非常に1に近い値となった。

不偏性のテストとしてα＝0、β＝1という仮説の検定を行ったが、τ＝0.25のケースのF値、それ以外のケースのカイ二乗値ともに有意となって、不偏性の仮説は棄却された。これは、βは非常に1に近いのであるが、定数項αが有意に0から負の方向に離れていたことに原因があると考えられる。

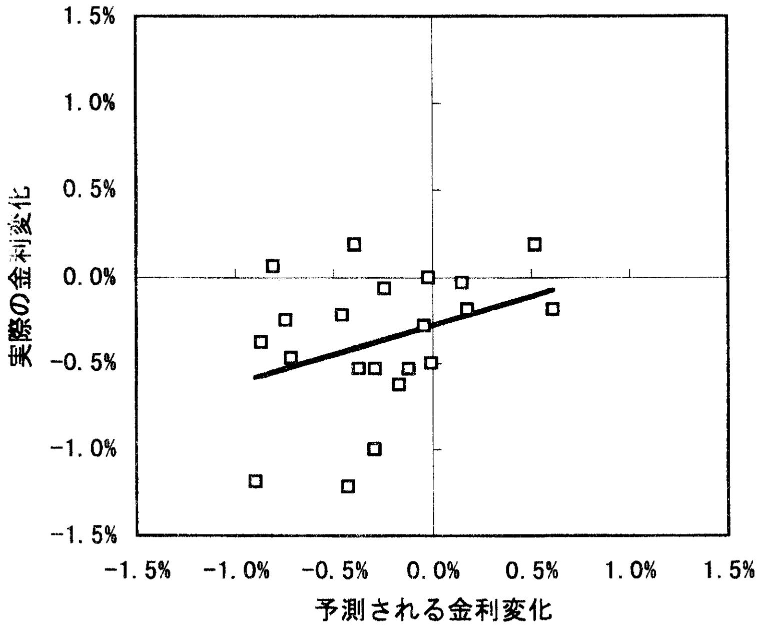
表5 Vasicek モデルによる予測値を使った回帰分析の結果

予測期間	サンプル数	α	β	R2	F値 カイ2乗値
3ヶ月	21	−0.0028* (0.0010)	0.34 (0.20)	0.13	6.10*
6ヶ月	20	−0.0058* (0.0013)	0.83* (0.21)	0.36	20.46*
9ヶ月	19	−0.0100* (0.0021)	0.98* (0.27)	0.33	27.28*
12ヶ月	18	−0.0141* (0.0027)	0.99* (0.36)	0.27	27.96*

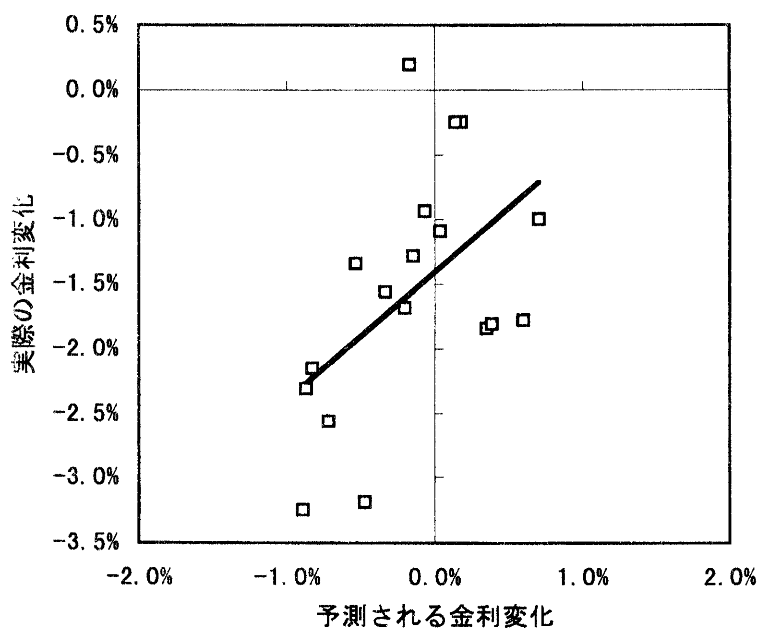
注. ()内は標準誤差、*印は5%有意

図6 Vasicek モデルから予測される金利の変化と実際の変化

τ =0.25年



τ =1.0年



6. 結論

Vasicekモデルのパラメータ推定値は金利のミーン・リバージョンの存在を強く示しており、米国のデータと比較して、日本ではミーン・リバージョンのスピードが非常に遅いことが明らかとなった。また、金利先物の金利予測力は、1ファクターの Vasicek モデルに全くひけをとらず、米国の結果を上回った[12]。

Vasicek モデルを利用することにより、将来金利の予測力を大きく向上させることはできなかった。もし、Vasicek モデルが金利の期間構造を正しく表現しているならば、予測が改善されなかった原因は λ が0に近いこと、つまり市場参加者のリスク回避度が小さいことに帰せられよう。

一方で、1ファクターのVasicek モデルでは期間構造を十分には説明できていないことを示す結果も、幾つか得られた。1つは、モデルから計算される金利先物価格が現実の先物価格にうまくフィットしなかったことである。また、モデルの期待値の不偏性も否定された。したがった、今後、2ファクター以上のモデルを使うことにより、現実のイールド・カーブへのフィットを向上させ、金利予測力を上げることができるのではないかと考えられる。

Fama(1987)が指摘したような、長期の予測ほど予測力が良くなるという現象は1年以下の予測期間では観察することができなかった。長期予測の分析を行うには、長期金利のデータを Vasicek モデルの推定に取り入れる必要があるが、その場合にはモデルのイールド・カーブへのフィットが更に悪化することが予想されるので、この点からも2ファクター以上のモデルの利用が不可欠となるだろう。

[12] ただし、(4)式の回帰において $\alpha=0$、$\beta=1$ という仮説のカイ二乗検定を行ったところ、すべての τ について、仮説は棄却された。従って、フォワード・レートが金利の期待値そのものになっているとは考えられない。

参考文献

Chen, R. and L. Scott, "Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Fixed Income* 3, 1993, 14-31.

Fama, E., "The Information in the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 13, 1984, 529-46.

Fama, E., "The Information in Long-Maturity Forward Rates," *American Economic Review* 77, 1987, 680-92.

Hamilton, J., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1984.

Pearson, N. and T. Sun, "Exploiting the Conditional Densitiy in Estimating the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance* 49, 1994, 1279-1304.

Mishkin, F., "The Information in the Term Structure: Some Further Results," *Journal of Applied Econometrics* 3, 1988, 307-314.

Newey, W. and K. West, "A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix," *Econometrica* 55, 1987, 703-708.

Stambaugh, R., "The Information in Forward Rates," *Journal of Financial Economics* 21, 1988, 41-70.

Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, 1977, 177-188.

安達　誠司、「金利変動を考える」、『大和投資資料』1994年3月、65-102.