

92-J-4

利子率とボラティリティの期間構造

小林孝雄
(東京大学経済学部)

1992年6月

利子率とボラティリティの期間構造

東京大学経済学部

小林 孝雄

1. はじめに
2. 利回り曲線とボラティリティ曲線
3. 二項モデル
4. 市場の不均衡状態
5. 裁定なしの条件とマルチンゲール確率測度
6. Ho-Leeモデルのあてはめ
7. ボラティリティが一定でない正規モデル
8. ボラティリティが一定でない対数正規モデル
9. 利子率モデルのパースペクティブ

参考文献

要約

利子率の期間構造モデルで重要な要素は、利回りの期間構造だけでなくボラティリティの期間構造をも的確に把握できるモデルを構築することである。短期利子率を唯一のファクターと考えるいわゆる1ファクター・モデルも、この点では十分な柔軟性を備えている。ボラティリティの期間構造に関する現実のデータをモデルに織り込む上で、の要点は、利子率のミーン・リバージョンではなく利子率変動の分散過程を適切に定式化することである。

1. はじめに

短期利子率は日々の金融市場で形成される最も基本的で重要な価格の一つである。従って、短期利子率についての研究は経済学の歴史とともに古い。伝統的には、経済学者の関心は短期利子率の水準が決定される仕組みを研究することに注がれた。しかし、金融経済学の応用分野の急速な発達によって、最近では、短期利子率の日々の動きを的確に表現する確率モデルの研究に人々の関心はシフトしている。

短期利子率の確率モデルがはじめて用いられたときの目的は、利子率の期間構造の決定を理論的に解き明かすことであった。これに対して、最近の研究は、現在観測される利子率の期間構造は与えられたデータとみなして、それに整合的なパラメータを所与の確率モデルの枠内で決定し、それから様々の金利連動証券の理論価格を導き出すことを目的にするものが多い。そうした応用例は、債券先物、債券オプション、債券先物オプション、変動利付債、 mortgages 証券、金利スワップ、金利キャップ、金利フロアなど、枚挙に暇がない。こうした価格モデルはまた、金利連動証券のポートフォリオが持つリスクをヘッジないしはコントロールするための方法も提供する。

このようなモデルのことを期間構造モデルと呼んでいる。本稿では、この期間構造モデルの考え方をできるだけ平易に解説するとともに、モデルの応用面に関する筆者の展望を明らかにしたい。また、最後の節ではこの分野の代表的な研究を簡単にサーベイする。

2. 利回り曲線とボラティリティ曲線

利子率の期間構造を表す曲線はスポット・イールドカーブと呼ばれる。それはデフォルト・リスクのないゼロ・クーポン債の複利最終利回りを残存期間との関係で描いた曲線である。このスポット・イールドカーブが水平な直線でないかぎり、クーポン債の最終利回りの理論値は同じ残存期間の債券でも、クーポン・レート

毎に異なる。従って、利回り曲線はクーポン・レート毎に引かれることになるが、以下ではこのことを念頭に置いたうえで、スポット・イールドカーブのことを簡単に利回り曲線と呼ぶことにしたい。

利回り曲線の形状は時間の経過とともに実に多様に変化する。この利回り曲線の時間的な動きを注意深く観察すると、各残存期間毎に利回りの変化の大きさが異なることに気付くはずである。一般には短期債の利回りの変化は長期債のそれよりも激しいことが知られているが、その差も時間とともに変化する。利回りの変動性が時間的に変化するという現象を期間構造モデルに取り込むことができるかどうか。期間構造モデルの有効性の大小はひとえにこの点にかかっているという事実が、最近多くの研究者によって認識されるようになってきた。

残存期間毎にゼロ・クーポン債の最終利回りの時間的変化の標準偏差を計算して描いた曲線をボラティリティ曲線と呼ぶ。この曲線は、利回りの水準に期間構造があるように、利回りのボラティリティにも期間構造があることを教える曲線である。以下の期間構造モデルの解説では、現在観測される利回り曲線とボラティリティ曲線の2つの期間構造にモデルのパラメータを合わせることでできるモデルと、利回り曲線にしかパラメータを合わせることでできないモデルを区別して、前者のモデルの要件を明らかにすることにも努めたい。

現在の利回りとボラティリティの期間構造が表1のように与えられているとしよう。このデータに合致するような期間構造モデルを作ることがわれわれの目標である。それができれば、与えられた金利連動証券の理論価格を導いたり、最適なヘッジ比率を計算したりすることができる。ただし、後者の説明は、紙面の制約上、ここでは割愛する。

表1 現在の期間構造

残存期間 (年)	利回り (%)	変動率ボラティリティ (%)	変動ボラティリティ (%)
1	10.0		
2	11.0	19.0	2.09
3	12.0	18.0	2.16
4	12.5	17.0	2.125
5	13.0	16.0	2.08
6	13.36	15.05	2.01

表1の変動ボラティリティとは利回りの年毎の変化の標準偏差をパーセント単位で表わしたものである。変動率ボラティリティとは、この標準偏差を現在の利回り水準に対する比率でパーセント表示したものである。従って、第2欄の利回りに第3欄の変動率ボラティリティを掛けて100で割れば第4欄の変動ボラティリティが得られる¹。利子率のボラティリティ曲線という場合、第3欄の変動率ボラティリティ曲線を指すことが多い。

3. 二項モデル

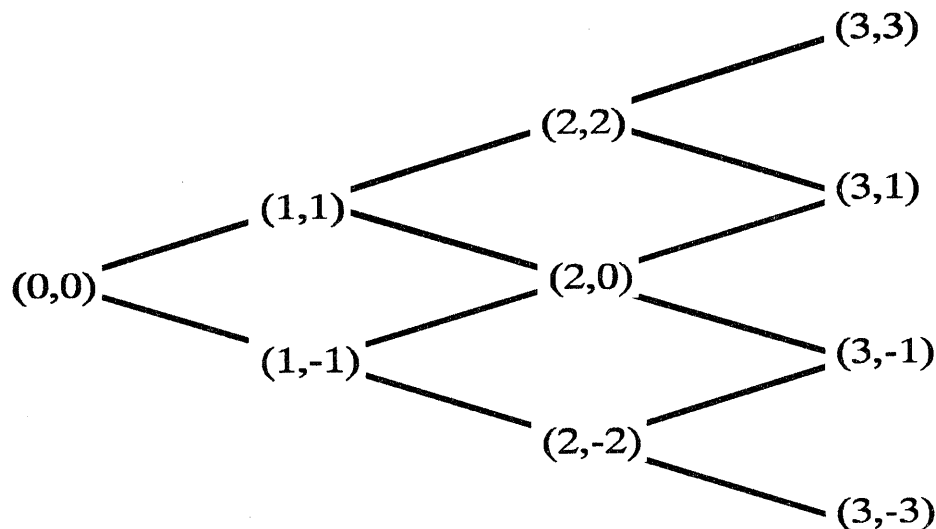
短期利子率の動きが図1のような二項モデルで表されるものとする。図の1期は1年に相当し、期間1年の利子率を短期利子率と考えることにする。1期の間に短期利子率はある幅だけ上昇するか、ある幅だけ下落するかのどちらかである。

¹ 表1は後述のBlack=Derman=Toy [1990]が用いたデータを本稿の目的に即して若干修正したものである。なお、後出(5)式に照らすと(変動ボラティリティ) = (現在の利回り) × [exp(変動率ボラティリティ) - 1] とするのが厳密には正しいが、ここでは説明を容易にするために本文のようにした。

図の左の端点が現在の時点 $(0, 0)$ である。今後1年間に短期利率が上昇すると、 $(1, 1)$ 点に到達する。下落すると、 $(1, -1)$ 点に到達する。1年後に $(1, 1)$ に到達して、2年目にも短期利率が上昇すると、2年後には $(2, 2)$ 点に達する。2年目に短期利率が下落すると、 $(2, 0)$ 点に達する。また、1年後に $(1, -1)$ に達する場合には、2年目に利率が上昇すれば2年後には $(2, 0)$ 、下落すれば $(2, -2)$ に到達する。

枝の分岐点は一般に (n, i) で表される。 n は現在からの経過年数を表していて、 $n=0, 1, 2, \dots$ である。括弧内の2番目の要素 i は利率の過去の経路に関する情報を表示している。具体的には、その時点までに利率が上昇した年数と利率が下落した年数を数えて、その差を示すのが i である。今日から n 年間利率が連続して上昇し続けると i の値は n となり、これが時点 n での i の最大値である。 n 年間の間に利率の下がる年が1年だけある場合には、上昇回数が $n-1$ 、下落回数が1回であるから、 i の値は $n-2$ となる。上昇回数が $n-2$ 回ならば i は $n-4$ 、上昇回数が $n-3$ 回ならば i の値は $n-6$ 、 \dots となり、最も小さい i の値は $-n$ である。

図1 二項モデル



以下では、ゼロ・クーポン債をはじめすべての金利連動証券の価格が図1の枝に沿って変動すると考える。このような仮定の数学的な意味と実用性、それに

よって受けるモデルの制約、およびモデル拡張の方向については、最後の節で説明する。

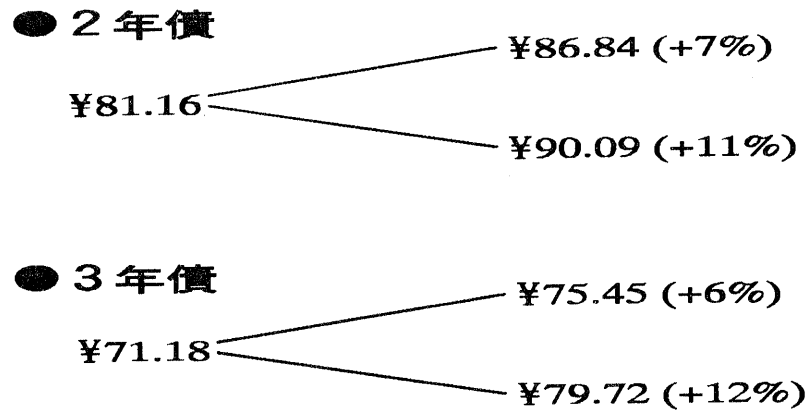
4. 市場の不均衡状態

表1のデータから現在の短期利子率は10パーセントと与えられている。期間2年のスポット・イールドは11パーセントであるから、残存2年のゼロ・クーポン債の現在の市場価格は額面100円当り $100/(1+0.11)^2 = 81.16$ 円である。同様に、期間3年のスポット・イールドは12パーセントであるから、残存3年のゼロ・クーポン債の現在の市場価格は額面100円当り $100/(1+0.12)^3 = 71.18$ 円である。

さて、どちらの債券もクーポン支払のない割引債であるので、現在の市場価格は額面以下のいわゆるアンダー・パーである。1年後には償還までの年数が1年減るので、価格はその分だけ額面に近くなる、つまり上昇するはずである。しかし、もし短期利子率が1年後に上昇すると、債券の価格を下方方向に引っ張るので、価格上昇はその分だけ相殺されるであろう。通常は期間の長い債券ほど短期利子率の変化に対して強く反応するので、この影響は2年債よりも3年債の方により強く現れる。逆に、今から1年後に短期利子率が下落すれば、債券の価格を上方向きに引っ張るので、2年債、3年債ともに大きく値上がりすることになる。このときの値上がりは、同じ理由から、3年債の方に大きく現れる。

そこで、それぞれの場合のこの2つの債券の価格を図2のように仮定してみよう。これらの数字は、2年債については、利子率上昇のケースで7パーセントの値上がり、利子率下落のケースで11パーセントの値上りを想定している。また、3年債については、利子率上昇のケースで6パーセント、利子率下落のケースで12パーセントの値上りを想定している。

図2 価格変化



もし債券の価格が図2のように動くとするならば、今日の市場で次のような裁定取引を行って確実な利益を上げることができる。つまり、2年債を300円分空売りして、入手代金の一部200円で3年債を買い、残り100円を1年債に投資するのである。この裁定取引の収支決算を行うと、利率が上昇する場合には、空売り分で21円の損失が生じるが、3年債への投資から12円の収益、1年債への投資から10円の収益が上がるので、正味1円の儲けになる。また、利率が下落する場合には、空売り分で33円の損失、3年債への投資から24円の収益、1年債への投資から10円の収益で、やはり正味1円の儲けになる。

取引制限や取引コストがまったくない市場では、だれでも資金の元手なしにこの裁定取引を行って、利率の上下に無関係に1年後に1円の儲けを確実に手に行うことができる。裁定取引の規模を大きくすれば、儲けをずっと大きくすることも容易である。このような状態を市場の不均衡状態と呼ぶ。なぜならば、だれもがこの裁定のさやの獲得をねらって同じ方向の取引を行おうとするからである。つまり、2年債には売りが、3年債と1年債には買いが集中して、図2の価格体系のままでは債券市場の売りと買いがバランスすることがない。このようなときには、通常、売りの集中する2年債の価格は低下し、買いの集中する3年債と1年債の価格は上昇する。

証券市場で取引されるすべての証券の需要と供給が丁度バランスしている状態を証券市場の均衡という。金融経済学では、証券市場が不均衡であるような事態

はまれにしか発生せず、また仮に発生しても上のような裁定取引によって迅速に均衡状態へと引き戻されていくと考える。この意味で、証券市場が均衡状態にあるときの価格を証券の理論価格という。

上の考察によってつぎのことが明らかになった。短期利子率およびあらゆる金利連動証券が図1のような二項モデルの枝に沿って動くとき、短期利子率や各債券の価格が将来の各分岐点で取りうる値はまったく自由というわけではない。それどころか、裁定の余地を許さないような価格の経路は、次節以降で明らかになるように、実はきわめて限定されているのである。

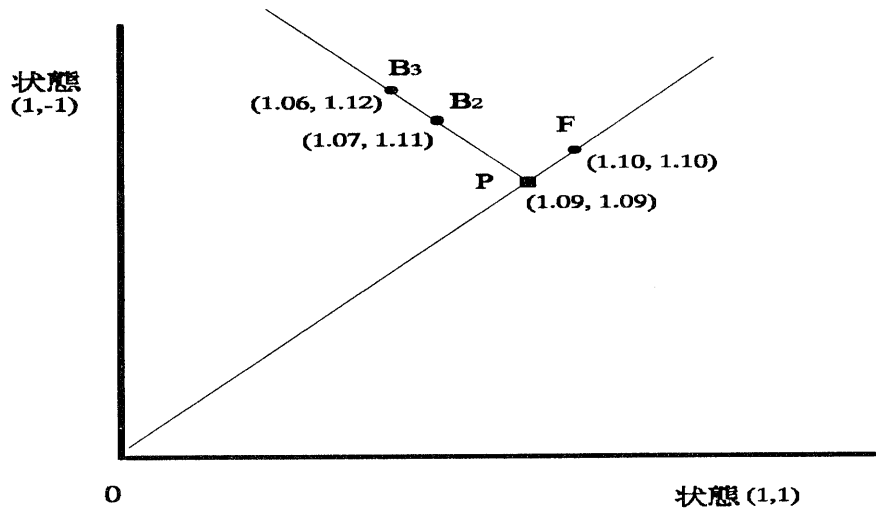
5. 裁定なしの条件とマルチンゲール確率測度

価格が図2のように動けば今日の市場で裁定の余地が存在することになるという事実は、図3から容易に判別できる。この図は証券や証券ポートフォリオの1年間の投資収益率を表している。今日1円を投資するものとして、利子率が上昇する場合(状態(1, 1))の1年後の投資資産の市場価値が横軸、利子率が下落する場合(状態(1, -1))の1年後の投資資産の市場価値が縦軸である。1円を1年債に投資すれば、1年後にどちらの状態が実現しても投資資産の市場価値は1.10円になる。つまり、図のF点は短期利子率での資金運用を表している。B₂点は2年債、B₃点は3年債を表している。

B₃からB₂へ向かって引いた直線と原点とF点を結んだ直線の交点をP点と名付ける。この点は、線分B₂B₃を2対3に外分する点であるが、それは債券B₃を2円分空売りして、その入手代金と自己資金1円の合計3円を債券B₂に投資することを意味している。P点の座標が(1.09, 1.09)であるということは、B₃を売ってB₂を買うというポジションを取れば、自己資金1円を1年後に確実に1.09円にすることができることを意味する。これは年率9パーセントのリスク・フリーな投資機会にはかならない。しかし一方で、市場には年率10パーセントのリスク・フリーな投資機会が存在する。したがって、前者の逆のポジションをとって(9パーセントで資金を借入れて)10パーセントで資金を短期運用すれば、1パーセ

ントの利ざやが確実に発生する。これを行うのが前節の裁定ポジションである。結論的にいえば、裁定が可能であった幾何学的な理由は、F点が B_2B_3 を結ぶ直線から外れていたことにあるのである。

図3 裁定ポートフォリオ



この観察を一般化してみよう。図4は今日から n 年目 ($n=0, 1, 2, \dots$)の年初から年末までの1年間の変化を表している。上は短期利率の動きであり、下は任意に選んだ金利連動証券の価格の動きである。

図4 第 n 期の変化

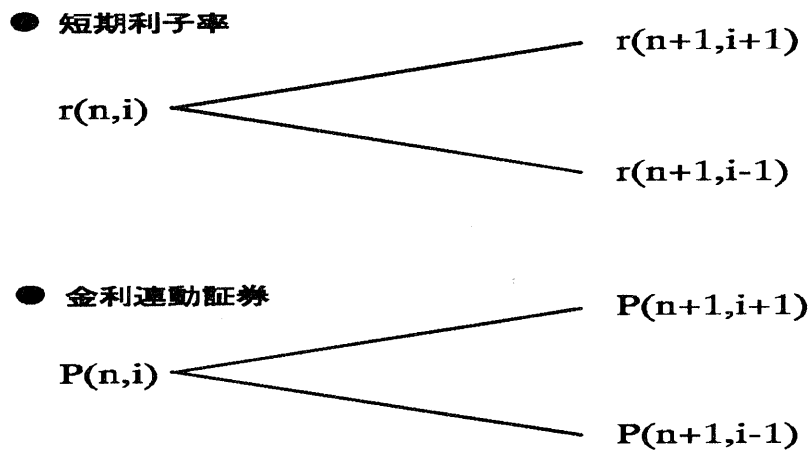
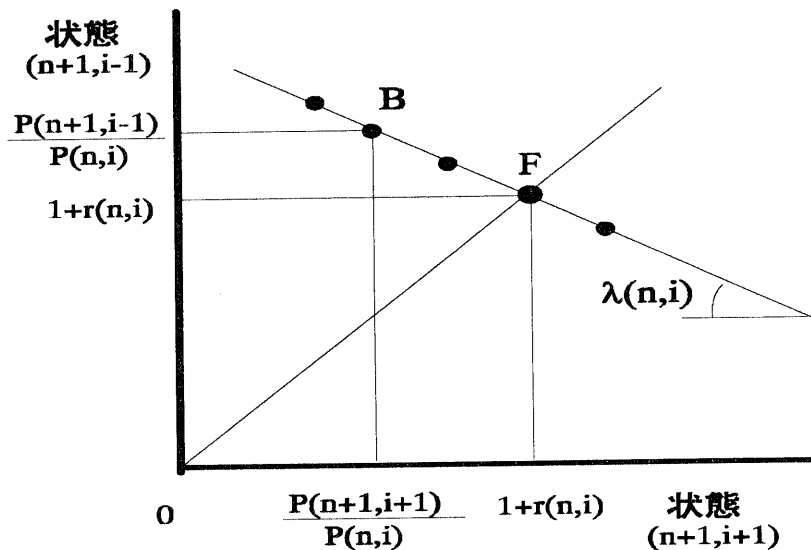


図5のF点は短期利子率による資金運用の投資収益率を表す点であり、B点は図4下図の金利連動証券の価格変化を表す点である。図3の考察より、n年後の今日の市場に裁定機会が存在しないためには、すべての金利連動証券の価格変化を表す点がF点を通る右下がりの直線上に位置しなければならないと結論された。

図5 裁定なしの条件



この直線の傾きを $\lambda(n, i) (>0)$ と記すことにすると、上の幾何学的な条件は次の数式で表現される：

$$\frac{\frac{P(n+1, i+1)}{P(n, i)} - (1+r(n, i))}{\frac{P(n+1, i-1)}{P(n, i)} - (1+r(n, i))} = -\lambda(n, i).$$

これを $P(n, i)$ について解いて整理すると、

$$P(n, i) = \frac{1}{1+r(n, i)} \left[\frac{1}{1+\lambda(n, i)} P(n+1, i+1) + \frac{\lambda(n, i)}{1+\lambda(n, i)} P(n+1, i-1) \right] \quad (1)$$

が得られる。

この(1)式はいわゆる割引公式の形をしている。すなわち、ある証券の状態 (n, i) での理論価格 $P(n, i)$ は、その証券の1年後の価格の期待値を状態 (n, i) での短期利子率 $r(n, i)$ を用いた割引率 $1+r(n, i)$ で割った割引現在価値である。事実、右辺の大括弧内に注目すると、そこで計算されているのは1期後の証券価格 $P(n+1, i+1)$ と $P(n+1, i-1)$ の加重平均である。つまり、大括弧内は、利子率の上昇、下落がある確率で起きるとしたときの1年後の価格の期待値を計算していることになる。

短期利子率とすべての金利連動証券の価格が二項ツリーに沿って変動するような経済の均衡経路では、どの金利連動証券についても(1)式の関係を成立させるような $\lambda(n, i)$ のベクトルが存在する。この $\lambda(n, i)$ は状態 (n, i) から上側の枝に沿って事態が進行する確率 $1/(1+\lambda(n, i))$ を形成する。そして、各時点、各状態における利子率の上昇が確率 $1/(1+\lambda(n, i))$ で、下落が確率 $\lambda(n, i)/(1+\lambda(n, i))$ で生起すると考えるとき、すべての証券の価格は1期先の価格の期待値を短期利子率で割引いた値に等しくなる。すべての証券価格にこのような関係を成立させるような状態確率のことをマルチンゲール確率測度と呼んでいる。²簡潔に言えば、市場にリスクなしの裁定機会が存在しないための必要十分条件は、マルチンゲール確率測度が存在することである。

この $\lambda(n, i)$ の二項モデルと短期利子率 $r(n, i)$ の二項モデルが確定すれば、任意の証券の価格は(1)式によって、すべての状態 (n, i) について一意的に決まることになる。二項ツリーの端点での理論価格は償還条項によって定めることができるので、後は時間軸を逆向きにさかのぼりながら、順次(1)式によって各分岐

² 每期ごとに短期利子率で資金を回転させていくとき、初期時点の1円が状態 (n, i) では $F(n, i)$ 円になっているとする。考察対象証券の価格 $P(n, i)$ の $F(n, i)$ に対する倍率 $P(n, i)/F(n, i)$ の時間経路を考えると、(1)式が常に成立しているならばこの相対価格はマルチンゲール過程になる。すなわち、すべての状態において、この相対価格の1期先の値に対する期待値は現在の相対価格の値に等しい。

点での価格を決めていくと、最後に当該証券の今日の理論価格が求まることになる。

以下ではすべての状態において $\lambda(n, i)$ の値は1に等しいと仮定して分析を進める。これはマルチンゲール確率測度がすべての分岐点で1/2であると仮定することになる。このとき(1)式は

$$P(n, i) = \frac{1}{1+r(n, i)} \left[\frac{1}{2} P(n+1, i+1) + \frac{1}{2} P(n+1, i-1) \right] \quad (2)$$

と、さらに一段簡単になる。この仮定は実はモデルに制約をかけるものではない。この点はモデルの自由度に関係する重要な論点であるが、その説明は別の機会に譲りたい。

6. Ho-Leeモデルの当てはめ

図1の二項ツリーの各分岐点における短期利子率の値 $r(n, i)$ が定まれば、(2)式によって任意の金利連動証券の理論価格を求めることができる。しかし、 $r(n, i)$ の値はツリー全体の分岐点の数だけあり、観測されるデータからそれらの値を確定することは無理である。 $r(n, i)$ の値が二項ツリーの分岐点上でどのように分布するかについて、何らかの仮定を置く必要がある。それは、短期利子率の確率モデルに適切な仮定を設けることを意味する。

ごく単純な確率モデルは $r(n, i)$ を次の(3)式で与えるものである：

$$r(n, i) = \mu(n) + \sigma i \quad (3)$$

この場合の短期利子率の二項モデルは図6のようになる。パラメータ σ は短期利子率の1期間当り変動の標準偏差で³、全期間一定の値をとるものと仮定される。パラメータ $\mu(n)$ は n 期の短期利子率の平均値である。Ho-Leeのモデル[1986]は(3)の仮定を採用した代表的な期間構造モデルである。

³ 各状態において上下の枝の確率は1/2ずつであるから、短期利子率の1期当り変動の標準偏差は σ と計算される。

図6 Ho-Leeモデル

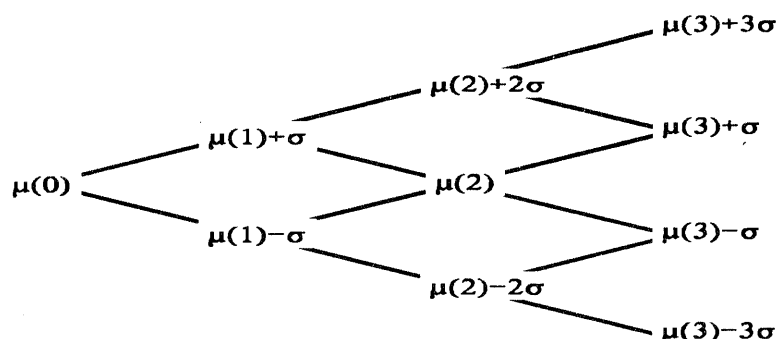


表1の残存期間1年物のデータより、今日の短期利率は10パーセントである。よって、まず $\mu(0) = 10\%$ である。

表1の変動ボラティリティとは、各ゼロ・クーポン債最終利回りの1年当り変動の標準偏差であった。(3)式のように短期利率の1期当り変動の標準偏差 σ が一定であるようなモデルの場合には、すべてのゼロ・クーポン債最終利回りの変動ボラティリティはこの σ に等しくなることが証明可能である。つまり、このモデルの下では、ボラティリティ曲線は水平な直線になり、かつそれは時間とともに上下することがない。したがって、表1に与えられた今日時点でのボラティリティ曲線に(3)のモデルをフィットさせることは原理的に不可能である。そこで、観測されたボラティリティ曲線の平均の水準に σ の値を合わせることにする。表1の変動ボラティリティの平均の値は2.093と計算される。以下では $\sigma = 2.10$ に設定して分析を進める。

後は、表1に与えられた残存期間2年以上の最終利回りから $\mu(1), \mu(2), \dots$ の値を決めることができれば、図6の利率ツリーは確定する。確定した利率ツリーを図7に示す。

これが表1の期間構造データに合っていることを、残存2年のゼロ・クーポン債を例にとって確かめよう。図8はこの債券の理論価格の動きを示している。2年後には償還を迎えるので、図8の価格ツリーの右端の価格はどこでも100円である。1年後に短期利率が14.14パーセントになるケースでは、この債券の価格は、 $100/(1+0.1414) = 87.61$ 円となる。また、1年後に短期利率が9.94パーセント

になるケースでは、債券の価格は、 $100/(1+0.0994) = 90.96$ 円となる。すると、1年後の価格に対する今日の期待値は87.61円と90.96円の平均で89.285円となる。残存2年債の今日の理論価格はこの期待値を今日の短期利子率で割引いた値に等しいので、 $89.285/(1+0.11) = 81.17$ 円と計算される。このように、価格ツリーの右端の値を知ることができれば、(2)式の割引公式をくり返し適用することで価格ツリーは完成する。表1のデータから2年債の最終利回りは11パーセントである。これは価格でいうと $100/(1+0.11)^2 = 81.17$ 円となるが、図8で計算された今日の理論価格と確かに一致する。

図7 利子率ツリー

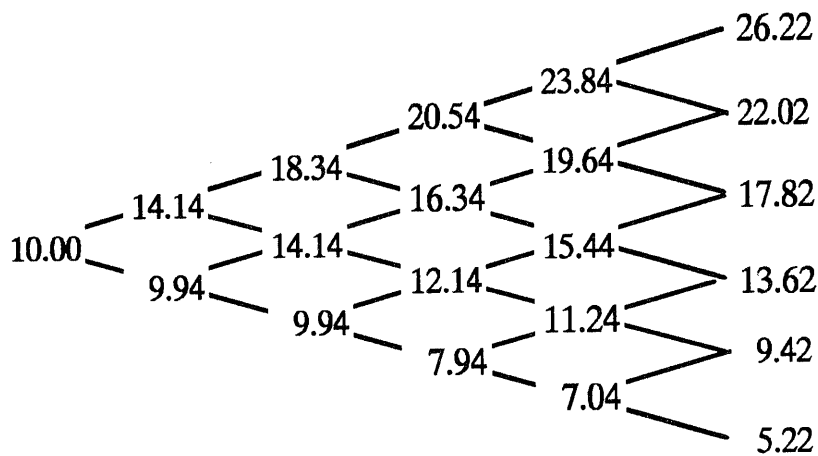
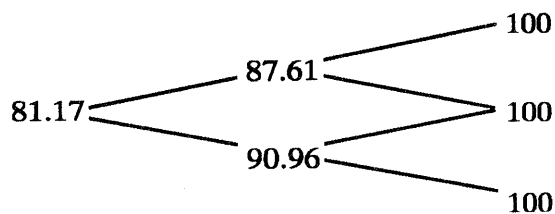
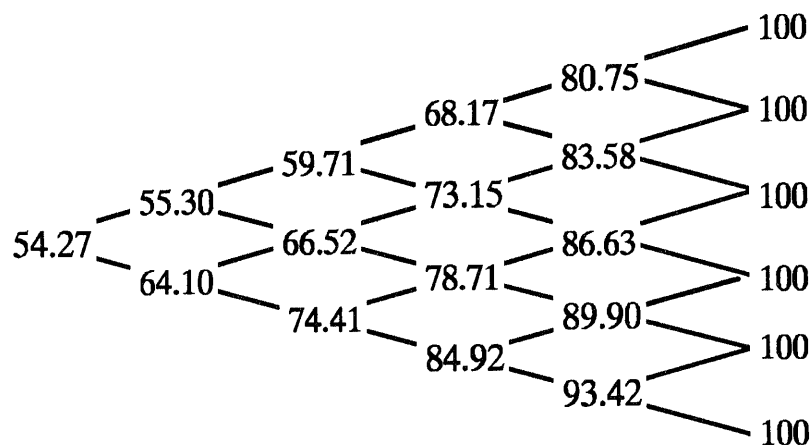


図8 2年債の価格ツリー



残存3年以上の債券についても、まったく同じように価格ツリーを完成させることができる。図9は残存5年のゼロ・クーポン債の価格ツリーを同様の作業によって完成させたものである。

図9 5年債の価格ツリー



次の図10と図11は2年債と5年債について、二項ツリーの各分岐点における最終利回りを表示したものである。2年債の1年後の利回りは来年の短期利率に他ならない。したがって、図10の真ん中の2つの数字は図7の利率ツリーの1年後の数字に一致するはずである。また、5年債の現在の利回り13パーセントは、表1のデータに合致しなければならない。

5年債の1年後の利回りは、利率上昇のケースで15.96パーセント、利率下落のケースで11.76パーセントである。これが1/2ずつの確率で起きるのであるから、利回り変動の標準偏差、つまり変動ボラティリティは $(15.96 - 11.76) / 2 = 2.1$ パーセントと計算される。その次の時点での変動ボラティリティは、利率上昇のケースで $(18.75 - 14.55) / 2 = 2.1$ パーセント、利率下落のケースで $(14.55 - 10.35) = 2.1$ パーセントと計算される。ツリーのどの点で計算しても、変動ボラティリティは年率2.1パーセントである。このように、(3)を仮定する期間構造モデルから導かれる利回りの変動ボラティリティは常に短期利率の変動ボラティリティ σ に等しくなる。言い換えると、Ho-Lee型のモデルでは変動ボラティリティ曲線は常に水平でその高さも時間的に一定であると、暗黙のうちに仮定していることになる。

図10 2年債の利回りツリー

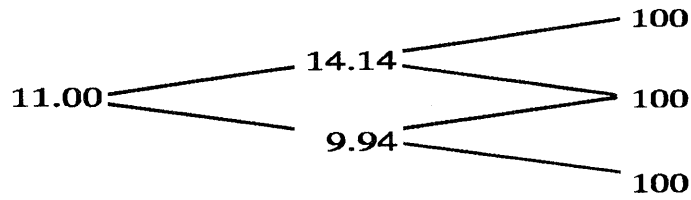
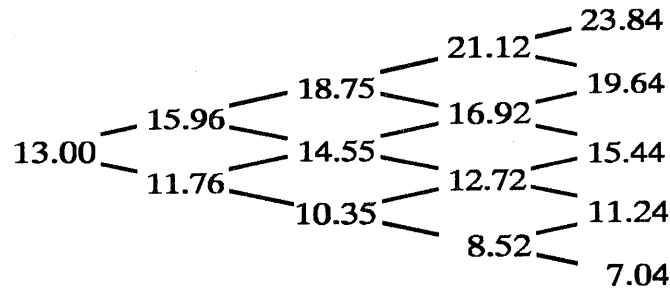
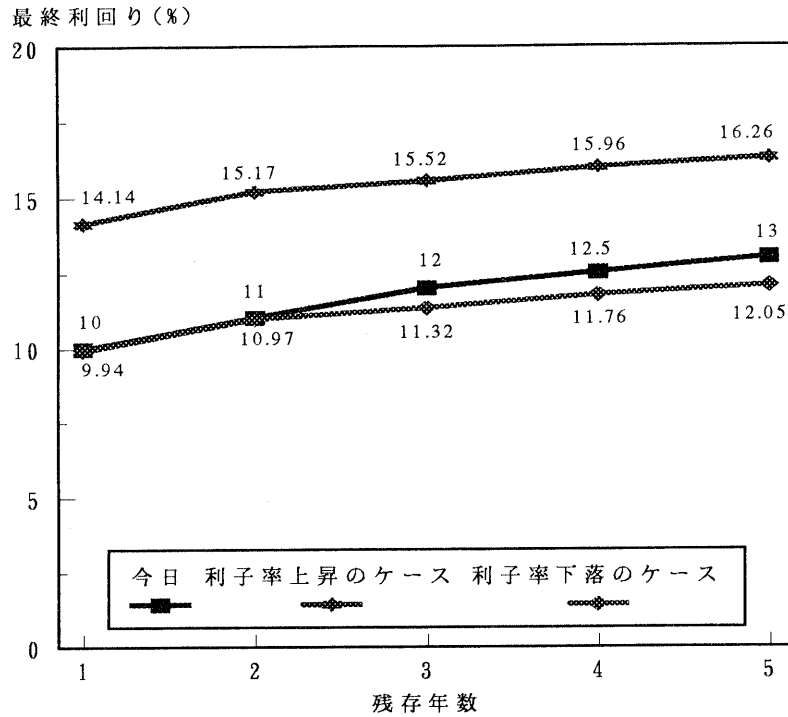


図11 5年債の利回りツリー



一つ注意しておく、変動ボラティリティ曲線が水平であることと利回り曲線が平行にしか移動しないということはまったく別のことである。図12の上下2本の線は、1年後の利回り曲線を金利上昇のケースと金利下落のケースについて描いたものである。真ん中の線は今日の利回り曲線である。各利回りの数字を図に書き込んでおいた。利回り曲線は決して平行には移動していない。利回りの変動ボラティリティが残存期間によらずに一定であることは、この図で言えば、点線で描かれた2本の利回り曲線の中の縦方向の幅が一定であることを意味する。

図12 利回り曲線の時間的变化



7. ボラティリティが一定でない正規モデル

前節のモデルの1期の長さを短くしていくと、その極限で短期利子率は正規分布に従うことが知られている。この意味で、(3)式は非常に標準的な確率モデルである。しかし、このままでは今日観測される利回り曲線にモデルを合わせることはできても、ボラティリティ曲線にモデルを合わせることはできない。

最も簡単にボラティリティ曲線にもモデルを合わせる方法は、(3)式を次のように修正することである：

$$r(n,i) = \mu(n) + \sigma(n) i \quad (4)$$

つまり、短期利子率の変動の標準偏差 $\sigma(n)$ が時間 n に依存することを許すのである。図13はこの二項モデルのパラメータ構造を示している。

図13 (4)式のモデル

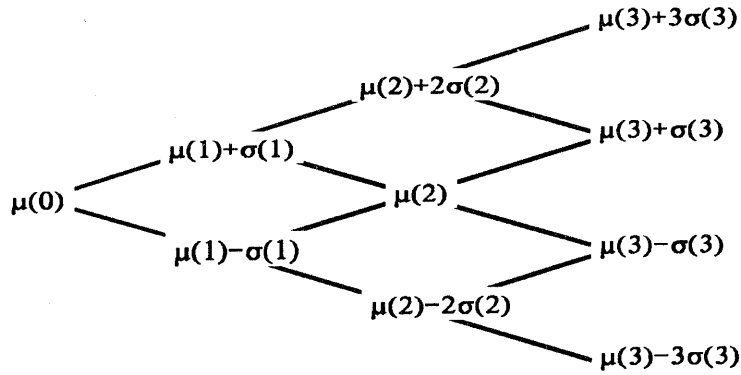


表1の利回り曲線とボラティリティ曲線のデータはこのパラメータを一意的に定めることになる。図14に得られた利率ツリーを、図15に5年債の価格ツリーを、図16に5年債の利回りツリーを示す。また、図17には最初1年間のボラティリティ曲線の変化を示す。

図14 利率ツリー

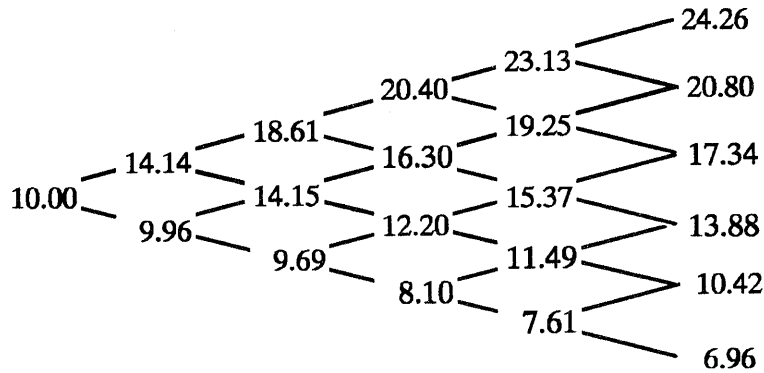


図15 5年債の価格ツリー

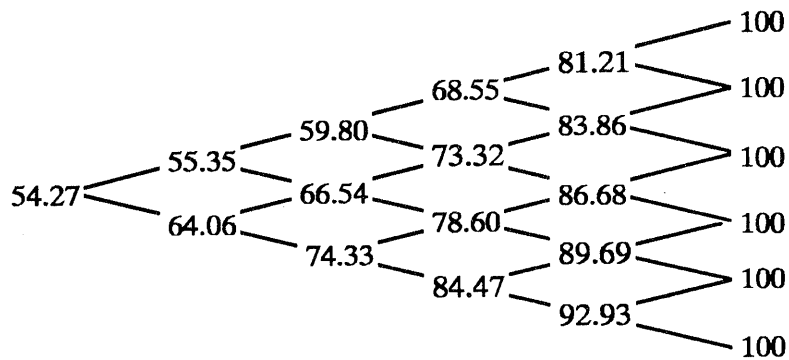


図16 5年債の利回りリターン

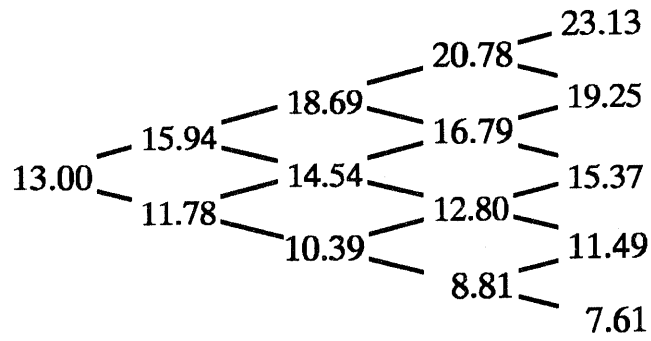
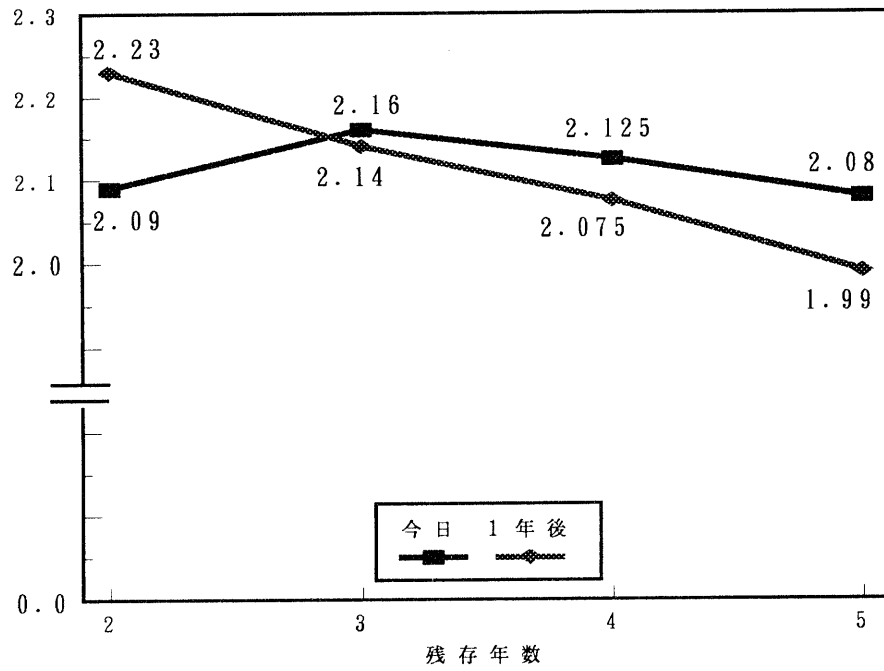


図17 ボラティリティ曲線の時間的変化
変動ボラティリティ (%)



8. ボラティリティが一定でない対数正規モデル

前2節で扱った正規モデルは、短期利率がマイナスの値になることを許してしまうという欠陥を持っている。利率がつねにプラスの値をとるように工夫するには、短期利率の動きを例えば次の(5)式のように仮定すればよい：

$$r(n,i) = \mu(n) \exp\{\sigma(n) i\}. \quad (5)$$

1期の時間を短くしていった極限における短期利率は、この場合には対数正規分布に従う。パラメータ $\mu(n)$ は今から n 期後の短期利率の分布のメディアン（中位数）を表す。また、パラメータ $\sigma(n)$ は短期利率の対数值の変動の標準偏差を表す。(5)式を仮定した期間構造モデルにはBlack=Derman=Toy[1990]があり、ゴールドマン=サックス社の1ファクター・モデルと呼ばれることがある。図18はこの二項モデルのパラメータ構造を示している。

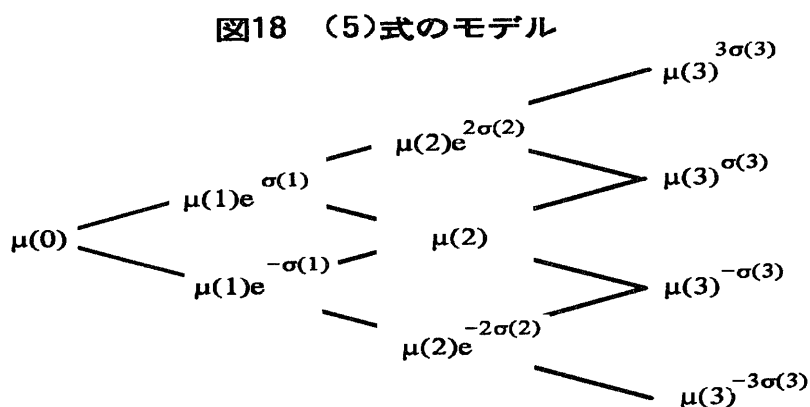


表1の利回り曲線とボラティリティ曲線のデータはこのパラメータを一意的に定めることになる。図19にデータに合致する利率ツリーを、図20に5年債の価格ツリーを、図21に5年債の利回りツリーを示す。また、図22には最初1年間のボラティリティ曲線の変化を示す⁴。

⁴ 図17は最終利回りの変化の標準偏差（変動ボラティリティ）を表しているのに対して、図22は最終利回りの変化率の標準偏差（変動率ボラティリティ）を表している。

図19 利子率ツリー

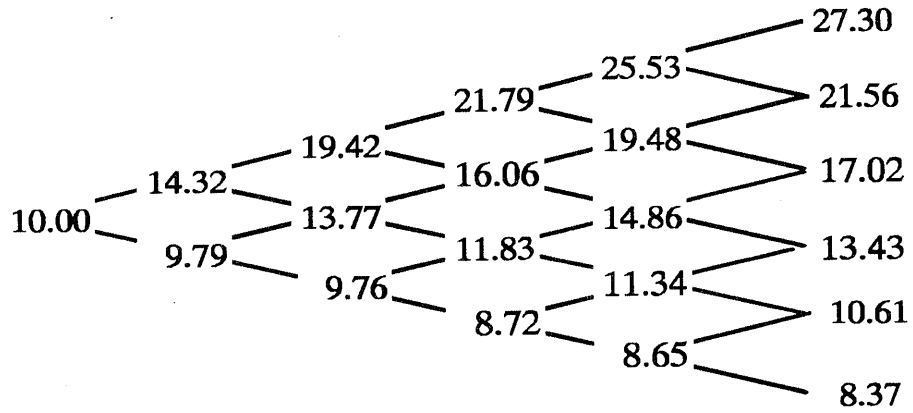


図20 5年債の価格ツリー

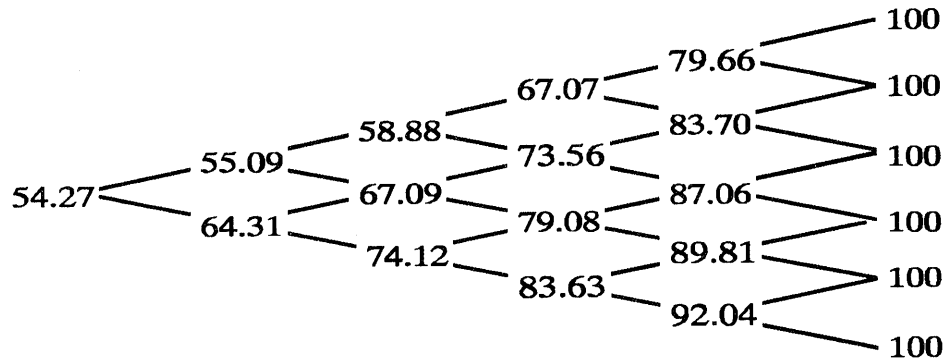


図21 5年債の利回りツリー

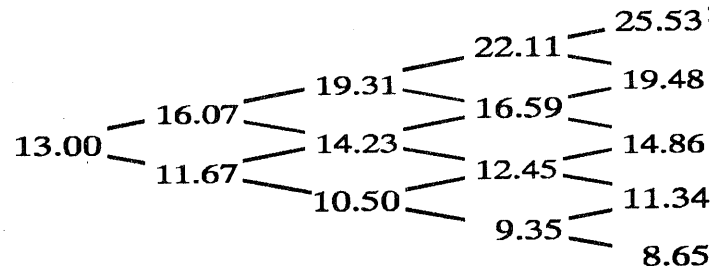


図22 ボラティリティ曲線の時間的变化
変動率ボラティリティ (%)

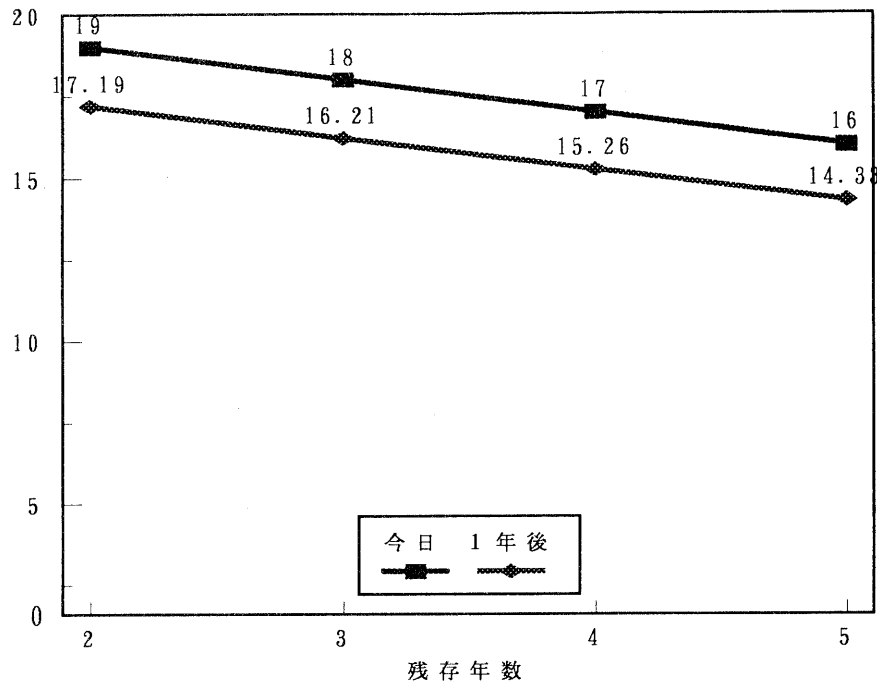


表1の期間構造データに合致するようにモデルのパラメータを決めるには、コンピュータの力を借りる必要がある。これらのモデルを実際に使うためには1つの期間を十分に短くとらなければならないが、期間を短くすると計算上の負荷は飛躍的に増大する。この問題を解決するよい方法が存在するのであるが、紙面の都合で割愛せざるをえない。また、本稿で導いた利子率ツリーは「リスク中立化された利子率過程」と呼ばれるもので、現実の短期利子率の確率過程にある数学的な変換をかけたものに相当する。そしてこの変換は市場のリスク・プレミアムに深く関係する。この辺の事情についての説明も別の機会に譲りたい。

9. 利子率モデルのパーспекティブ

短期利子率の確率過程を $\{r(t); t \geq 0\}$ と記すと、第6節で扱ったHo-Lee型のモデルの連続時間極限は

$$dr(t) = \mu(t) dt + \sigma dZ(t) \quad (6)$$

と、標準ブラウン運動 $\{Z(t); t \geq 0\}$ のドリフト部分だけを時間に依存させた拡散過程に相当する。また、第7節のモデルは

$$dr(t) = \mu(t) dt + \sigma(t) dZ(t) \quad (7)$$

と、標準偏差部分も時間に依存させたものである。(6)、(7)ともに、 $r(t)$ の時間的変動 $dr(t)$ の条件付き分散がランダムでないと仮定していることになる。事実、図6と図13の二項ツリーでは、ある時点から次の時点にかけての利率の変化の幅はそのときの状態（利率の水準）によらないと仮定されていた。これらのモデルでは $r(t)$ の条件付き分布は正規分布に従う。

一方、第8節で扱ったBlack=Derman=Toy型のモデルの利率ツリー図18は、利率の対数値の変化の幅がそのときの状態（利率の水準）によらないと仮定したものである。このとき、利率そのものの変化の幅はその時点での利率の水準に比例することになる。つまり、第8節の利率モデルの連続時間極限は、

$$dr(t) = \mu(t) dt + \sigma(t)r(t) dZ(t) \quad (8)$$

と、拡散過程の標準偏差部分が利率 $r(t)$ に比例し、比例定数 $\sigma(t)$ が時間に依存するようにしたものである。このときには、 $r(t)$ の条件付き分布は対数正規分布に従う。

正規分布型の利率モデルを扱った初期の代表的な論文はMerton [1973]とVasicek [1977]であり、最近ではJamshidian [1989]がある。対数正規型の利率モデルを仮定したものには、Dothan [1978]、Brennan and Schwartz [1980]、Marsh and Rosenfeld [1983]などがある。Dothanは

$$dr(t) = \sigma r(t) dZ(t) \quad (9)$$

を、Marsh=Rosenfeldは

$$dr(t) = \beta r(t) dt + \sigma r(t) dZ(t) \quad (10)$$

を仮定している。また、Brennan=Schwartzは

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)) dt + \sigma r(t) dZ(t) \quad (11)$$

を仮定して転換社債の理論価格について論じている。(11)式のドリフト項 $(\alpha + \beta r(t))$ はいわゆる利率のミーン・リバージョンを反映する定式化であり、Vasicekの正規型モデルもこの要素を含んだモデルである。

$dr(t)$ の条件付き標準偏差が $r(t)$ に比例すると仮定する対数正規型モデルに対して、 $r(t)$ の平方根に比例すると仮定するモデルも多く用いられている。この型のモデルは Cox, Ingersoll and Ross [1985] の発案による。Dunn and McConnell [1981] は mortgage 証券、Ramaswamy and Sundaresan [1986] は債券先物と債券先物オプションの価格モデルに、Sundaresan [1989] は利率スワップの評価に、また Longstaff [1990] は利回りオプションの評価にこの型の利率モデルを用いている。

$dr(t)$ の条件付き標準偏差の $r(t)$ への依存関係をより一般化したモデルに、分散弾力性一定のモデル (CEV モデル、Constant Elasticity of Variance Model) がある。これは

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t)) dt + \sigma [r(t)]^\gamma dZ(t) \quad (12)$$

という定式化をとるものである。Cox, Ingersoll and Ross [1980] はこの型のモデルを用いた初期の論文であり、

$$dr(t) = \sigma [r(t)]^{3/2} dZ(t) \quad (13)$$

として、変動金利ローンの評価を試みている。前出の Marsh and Rosenfeld [1983] も (12) 式の利率モデルについて考察を加えている。

本稿で説明した期間構造モデルの特徴は、利率の期間構造の変化や金利連動証券の価格変動が短期利率の変動だけによって引き起こされると仮定した点である。このようなモデルは 1 ファクター・モデルと呼ばれる。本文の例で確認したように、1 ファクター・モデルで理論的に決まる利回り曲線は時間的に平行移動しかしないというわけではない。また、Ho-Lee 型のモデルではボラティリティ曲線は水平で時間的にもシフトしないが、これは利率モデルの標準偏差項が定数であると仮定されているからにすぎない。

利率の二項ツリーを念頭に置くと、各分岐点における利率の値の分布にどのような構造を仮定するかが、利率の確率モデルを 1 つ 選択することに相当する。この構造には、時間軸方向の構造と状態軸方向の構造がある。図 6、図 13、図 18 で水平方向の構造、つまり $\{\mu(0), \mu(1), \mu(2), \mu(3), \dots\}$ の時系列構造が前者であり、縦方向の構造が後者である。前者をドリフト構造、あるいはミーン・

リバージョン構造、後者を分散の構造と呼ぶこともできる。最近の実証研究には利子率のミーン・リバージョン構造の重要性を指摘するものが多い。しかし、本稿で最も強調したい点は、ボラティリティの期間構造やその時間的変動の重要性である。そして、期間構造の実際の動きをモデルに適切に反映させるためには、利子率モデルの分散構造の仮定にこそ、より注意深い吟味を加える必要がある。

期間構造モデルをより精緻化する方向が、2ファクターあるいは3ファクター・モデルの採用であることは自明である⁵。しかし、その場合にも短期利子率が第一のファクターとなるわけであり、短期利子率の確率モデルの適否が金利連動証券の評価やリスク・ヘッジの巧拙を大きく左右する。

⁵ 2ファクター・モデルの代表的なものに Schaefer and Swartz [1984]、Heath, Jarrow and Morton [1990]がある。また3ファクター・モデルには例えば Litterman and Scheinkman [1991]がある。

参考文献

- [1] Black, Fischer, Emanuel Derman and William Toy, "A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options," *Financial Analysts Journal*, January-February 1990, pp. 33-39.
- [2] Brennan, Michael J. and Eduardo S. Schwartz, "Analyzing Convertible Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 15, 1980, pp. 907-929.
- [3] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, "An Analysis of Variable Rate Loan Contracts," *Journal of Finance* 35, 1980, pp. 389-403.
- [4] Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, and Stephen A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* 53, 1985, pp.385-407.
- [5] Dothan, Uri L., "On the Term Structure of Interest Rates, " *Journal of Financial Economics* 6, 1978, pp. 59-69.
- [6] Dunn, Kenneth B. and John J. McConnell, "Valuation of GNMA Mortgage-Backed Securities," *Journal of Finance* 36, 1981, pp.599-616.
- [7] Heath, David, Robert Jarrow, and Andrew Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25, 1990, pp. 419-440.
- [8] Ho, Thomas S.Y. and San-Bin Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance* 41, 1986, pp. 1011-1029.

- [9] Jamshidian, Farshid, "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance* 44, 1989, pp. 205-209.
- [10] Litterman, Robert and Jose Scheinkman, "Common Factors Affecting Bond Returns," *The Journal of Fixed Income* 1, 1991, pp. 54-61.
- [11] Marsh, Terry A. and Eric R. Rosenfeld, "Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices," *Journal of Finance* 38, 1983, pp. 635-646.
- [12] Merton, Robert, "The Theory of Rational Option Pricing," *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 1973, pp. 141-183.
- [13] Ramaswamy, Krishna and Suresh M. Sundaresan, "The Valuation of Floating-Rate Instruments," *Journal of Financial Economics* 17, 1986, pp. 251-272.
- [14] Schaefer, Stephen and Eduardo S. Schwartz, "A Two-Factor Model of the Term Structure : An Approximate Analytical Solution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 19, 1984, pp. 413-424.
- [15] Sundaresan, Suresh, M., "Valuation of Swaps," Working Paper, Columbia University, 1989
- [16] Vasicek, O., "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 1977, pp.177-188.