

84-J-1

「経済時系列」における
グレンジャー因果性：
理論と実例」*

國友直人

(東京大学)

1984年1月

マクロ経済学研究プロジェクト

日本産業経済研究施設

東京大学経済学部

* 本ディスカッション・ペーパーは研究上の討論のために配布するものであり、著者の承諾なしに引用・複写することを禁ずる。

国友「経済時系列」における... 修正箇所

国友

- page 22 l. 6 $X_t \xrightarrow{IG} Y_t, Y_t \xrightarrow{IG} X_t$
- 22 (2.45) $A^{-1} \Rightarrow A=I$
- 22 (2.46) $m \Rightarrow M$
- 28 (3.1) $D \Rightarrow D_t \text{ etc}$
- 32 (4.3) $|S| \Rightarrow \det(S)$
- 32 (4.4)
- 32 19 $\sigma_{11}\sigma_{22} \geq$
- 33 8 $F \Rightarrow F_{X,Y}$
- 37 定理 4.2 仮定 A を取り除き
- 38 $f_Y(\lambda) = f_{Y|X}(\lambda) + f_{Y|Y}(\lambda) + f_{Y|X,Y}(\lambda)$
- $f_X(\lambda) = f_{X|X}(\lambda) + f_{X|Y}(\lambda) + f_{X|X,Y}(\lambda)$
- の分解を考へる (詳細は略, 論文参照)
- 44 1 独立 \Rightarrow 互いに独立
- 46 8 最小自乗推 \Rightarrow 最小自乗推定
- 51 (5.25) $B^{(0)'} \Rightarrow B^{(0)} \leq B^{(0)'}^{-1}$

國友直人**

I	グレンジャー因果の概念	P.1
	1. はじめに	
	2. 予測とグレンジャー因果	
	3. グレンジャー因果をめぐる諸問題	
II	グレンジャー非因果性の検出法	P.10
	1. 二次元定常確率過程	
	2. グレンジャー検定	
	3. シムズ検定	
	4. Pierce-Haugh検定	
	5. 検定方法の比較	
III	実例 (日本における実質所得と貨幣)	P.26
	1. データ	
	2. グレンジャー非因果性の検定結果	
IV	周波数領域における因果方向の検出	P.31
	1. Gewekeの因果尺度	
	2. RPC分解	
	3. RPCによる分析例	
V	グレンジャー非因果性と外生性	P.44
	1. 簡単な例	
	2. グレンジャー非因果性と計量的外生性	
注	P.55
引用文献	P.56

*本稿は大学院講義ノートの一部として準備された。本研究に際して文部省科学研究費
No. 58730009, No. 58330003, 及びワイズより援助を受けた。

**東京大学経済学部助教授

I. グレンジャー因果の概念

1. はじめに

時系列分析の経済データへの応用の中でも因果関係の分析は最近になって非常に関心が持たれるようになった。その直接の契機となったのは Granger (1969) がグレンジャー因果 (Granger Causality) の概念を導入したことであろう。それに続いて Sims (1972) が非因果性を統計的に検定する方法としてシムズ・テスト (Sims Test) を提案した。彼はその方法を用いて米国のマクロ・データより貨幣から所得へのグレンジャーの意味での一方的因果方向がある事を主張した。この二つの論文の内容は多くの経済学者の関心を引きつけるとともに、その後米国のみならず日本を含めて、特にマクロ経済学的な多くの実証的研究を誘発することになった。

ところで、多くの研究の中で、グレンジャーの因果性とその解釈をめぐっていくつかの実証的レベルあるいは理論的レベルにおいて、しばしば混乱がみうけられる。その代表的なものをいくつかここで挙げると、

- (i) グレンジャー非因果性 (Granger Non-Causality) の発見を一般的因果関係の“証明”と同一視する短絡的な考え方。
- (ii) 異なる統計的検出方法によってほぼ同一のデータについての因果方向の結果が必ずしも整合的でない点。
- (iii) グレンジャー非因果性を計量経済学における外生性 (Exogeneity) と同一視することによる混乱。

などがある。

以下ではグレンジャー因果をめぐるこれまでの理論的な議論をまとめるとともに、上で挙げた諸点がなぜ誤りであるかを明らかにすることを試みる。そして、その構成は次の通りである。まず第Ⅱ節でグレンジャー因果の概念を導入し、その定義にまつわるいくつかの問題にふれる。次に第Ⅲ節でグレンジャー非因果性を統計的に検定するいくつかの方法を解説し、それらの間の互いの関連を述べる。第Ⅳ節では日本のマクロ分析でしばしば用いられる貨幣と実質所得の関係の分析を実例として与える。さらに第Ⅴ節では周波数領域における因果方向の分解の方法を解説し、さらにその方法を第Ⅳ節の実例に適用する。最

後に第VI節ではグレンジャー非因果性と計量経済学における外生性の概念との関連を述べる。

2. 予測とグレンジャー因果

“因果”の概念は経済学をはじめあらゆる科学研究において基本的問題といってよいであろう。因果関係の発見は科学の発展の中で中心的役割を演じてきた。俗説によればニュートンは木からリンゴが落ちる現象から万有引力の法則を発見したとされるが、この場合、“リンゴが木から落ちる”結果から“万有引力の法則”なる原因を発見したと解釈できよう。ところで経済学を含めて社会科学においては“原因”と結果を他の影響を排除することによって確かめる道具としての実験は一般的には可能でない。従って原因—結果の因果連鎖を厳密に証明することは原理的に可能ではない。

しかしながら、因果関係の方向を経験的に定義することは次に述べるように可能である。ここで“経験的”であるとは確率論的あるいは統計学的であると言ってもよい。歴史的時間には一つの特質がある。過去と現在は将来の事象の生起に影響を及ぼし得るが将来は過去と現在の事象の生起に影響を及ぼし得ない。このことを一つの公理 (Axiom) とするとこの節で導入するグレンジャーの因果方向の概念はある程度直観的に理解できるであろう。

ここでグレンジャー因果を導入する為にまず予測について簡単な準備を行うことにしよう。まず与えられたある確率空間の上に二つの確率変数 X と Y があるものとする。このとき変数 Y を X の関数 $f(X)$ によって確率的に予測することを考えよう。このとき次の事実がよく知られている。

定理 1. 1 :

確率変数の予測の平均自乗誤差 (Prediction Mean Squared Error, 略してしばしば PMSE と書く) を最小にする X の関数は確率変数 X を条件としたときの Y の条件付期待値

$$(1.1) \quad \hat{Y} = E(Y|X)$$

で与えられる。

証明： Y の予測量である確率変数 X のある関数 $f(X)$ の平均自乗誤差 $PMSE [f(X)]$ の分解を次のように行う。

$$(1.2) \quad \begin{aligned} PMSE(f(X)) &= E[Y - f(X)]^2 \\ &= E\{[Y - E(Y|X)] + [E(Y|X) - f(X)]\}^2 \\ &= E[Y - E(Y|X)]^2 + 2E[Y - E(Y|X)] [E(Y|X) - f(X)] \\ &\quad + E[E(Y|X) - f(X)]^2 \\ &= E[Y - E(Y|X)]^2 + E[E(Y|X) - f(X)]^2 \end{aligned}$$

ここで最後の式を最小にするのはほとんどいたる所で (a. e.) $f(X) = E(Y|X)$ となる時に限られる。この時最小の PMSE は X を条件とした時の Y の条件付分散 $V(Y|X)$ で与えられる。||

ここで注意を要するのは最適な予測量 (1. 1) は X の線型関数とは限らないことである。このことは次の例によって明らかであろう。

例 1. 1: 二つの離散 (Discrete) 確率変数 X と Y の確率分布が
 (1.3) $P(X = i, Y = j) = P_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$

で与えられているとする。ただし、 $0 < p_{ij} < 1$ かつ、 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ である。この時 X に基づく Y の予測量を求める。 $X = i$ ($i = 1, 2, 3$) を与えた時の Y の条件付期待値は簡単な計算より、

$$E[Y|X = 1] = \frac{p_{11} + 2p_{12} + 3p_{13}}{p_{11} + p_{12} + p_{13}},$$

$$E[Y|X = 2] = \frac{p_{21} + 2p_{22} + 3p_{23}}{p_{21} + p_{22} + p_{23}},$$

$$E[Y|X = 3] = \frac{p_{31} + 2p_{32} + 3p_{33}}{p_{31} + p_{32} + p_{33}},$$

となる。ところが一般には定数 a, b を用いて $E[Y|X] = a + bX$ と表すことはできない。||

次に予測の誤差をもちいてグレンジャー因果性を導入しよう。Granger (1969) に沿って次のような記号を導入する。ある二つの定常な確率過程を $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ とする。 t 期における X_t の過去の情報【注 1-1】を $\overline{X}_t = \{X_{t-j}, j = 1, 2, \dots\}$, X_t の現在及び過去の情報 $\overline{X}_t = \{X_{t-j}, j = 0, 1, 2, \dots\}$ とする。同様に $\{Y_t\}$ に関して \overline{Y}_t と \overline{Y}_t を定める。次に U_t を t 時点において利用可能な情報、 $U_t - Y_t$ を Y_t を除いた U_t について t 時点において利用可能な情報とする。さらに $\sigma^2(X_t | U_t)$ を情報 U_t を用いた時の X_t の最適予測の平均自乗誤差 (PMSE) とする。従って、 $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t - \overline{Y}_t)$ は t 時点において U_t より Y_t を除いた過去によって X_t を予測した時の PMSE となる。

定義 1. 1: [グレンジャー因果関係] $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t) < \sigma^2(X_t | \overline{U}_t - \overline{Y}_t)$ ならば Y_t はグレンジャーの意味で X_t への因果方向があると言い、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ と表す。

定義 1. 2: [フィード・バック関係] $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t) < \sigma^2(X_t | \overline{U}_t - \overline{Y}_t)$ であつ、 $\sigma^2(Y_t | \overline{U}_t) < \sigma^2(Y_t | \overline{U}_t - \overline{Y}_t)$, すなわち $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ かつ、 $X_t \xrightarrow{G} Y_t$

ならば X_t と Y_t の間に Feedback (フィード・バック) 関係があると言い、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ と表す。

定義 1. 3 : [瞬時的グレンジャー因果関係, Instantaneous Granger Causality]
 $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t, \overline{Y}_t) < \sigma^2(X_t | \overline{U}_t)$ ならば Y_t から瞬時的グレンジャーの意味で X_t への因果方向があると言い、 $Y_t \xrightarrow{IG} X_t$ と表す。

この定義は最適予測の平均自乗誤差 (PMSE) の増減によって因果方向を規定しようとする試みである。時点 t における確率変数 X の予測に際して、別の確率変数 Y に関する過去の情報を用いる方がそうでない場合よりも X を予測する精度が平均自乗誤差 (Mean Squared Error, 略して MSE) の意味で改善される時、 Y はグレンジャーの意味で X の原因、すなわち $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ とする。したがってこの定義に従うならば、もし Y_t の過去が現在の X_t を予測する際に PMSE の意味で影響を及ぼさない、すなわち $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t) = \sigma^2(X_t | \overline{U}_t - Y_t)$ の時には Y_t はグレンジャーの意味で X_t の原因ではない。このことを以下では $Y \not\xrightarrow{G} X$ と記すことにする。フィード・バック関係とは X_t と Y_t が互いに他の過去を知ることによって PMSE が改善される関係であり、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ ならば、 $X_t \xrightarrow{G} Y_t$ であることは X_t と Y_t に関して定義が対称であることにより明らかであろう。 Y_t が瞬時的 (Instantaneous) グレンジャーの意味で X_t の原因、 $Y_t \xrightarrow{IG} X_t$ 、であるとは Y_t の現在の値を知ることによって現在の X_t の予測の PMSE を改善することができることを意味する。従って、もし現在の Y_t が現在の X_t の予測に PMSE の意味で影響を及ぼさない、すなわち $\sigma^2(X_t | \overline{U}_t, \overline{Y}_t) = \sigma^2(X_t | \overline{U}_t)$ の時には Y_t は瞬時的グレンジャーの意味で X_t の原因ではないことになる。このことを以下では $Y_t \not\xrightarrow{IG} X_t$ と記すことにする。

3. グレンジャー因果をめぐる諸問題

予測の良さ、それも特に予測の平均自乗誤差を基準とする Granger (1969) による因果方向の定義に基づいて実際の時系列データを解釈する場合には種々の問題が生じる。ここではその中でも重要と思われるいくつかの問題に触れておくことにする。以下その例をいくつか挙げる。

(i) タイミングの問題: Granger による因果方向の定義の前提の一つは、現在及び過去は未来の原因となり得るが現在と未来は過去の原因となり得ない、と言う事実である。実際の時系列データを解釈する際には過去・現在・未来のタイミングは必ずしも明瞭とは

言えない場合がある。その著名なものとしては、Granger による稲妻と雷の例がある。嵐の中ではしばしば時点 $t-1$ で稲妻 (Y_{t-1}) を観測すると時点 t における雷 (X_t) を予測することができる。この時、定義 1. 1 と 1. 2 より、稲妻 \rightarrow 雷でありかつ、雷 \xrightarrow{G} 稲妻となるこの結論は我々の常識にてらして奇異であろう。この現象の原因は稲妻と雷の空気中の伝達速度による記録上のタイミングの問題によるが、このことは気象についての初歩的知識によって初めて可能となる。別の例として、1月18日の天気予報 (Y_t) によって東京において1月19日に降雪 (X_{t+1}) が予想されたとしよう。この時、単純にグレンジャーの因果を応用すると、 $Y_t \xrightarrow{G} X_{t+1}$ すなわち天気予報がグレンジャーの意味で降雪の原因となってしまう。この例は次に述べる情報の範囲の問題でもある。

(ii) 期待 (Expectation) と情報の範囲： 前述の定義 1. 1 ~ 1. 3 において時点 t において利用可能な情報を U_t としたが、その範囲がどこまで及ぶのか必ずしも明らかでない。そこで経済学でしばしば問題となる期待について次のような例を考えよう。まず天気予報によって次の冬は百年に一度の寒波の到来が予想されミカンの収穫が大幅に減少することが予想 (anticipate) されるとしよう。この情報によって消費者は一時的価格の上昇の期待の為に需要を大幅に増加することが想像される。この時、結果としてはミカンの価格は上昇するであろう。ここで消費者のミカンの価格上昇の期待を Y_t 、ミカンの市場価格を X_t とすると $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ となるであろう。さて、ここで利用可能な情報 U_t の中に Z_t として寒波予想を含めてみよう。そうすると今度は、 $Z_t \xrightarrow{G} Y_t \xrightarrow{G} X_t$ となって寒波到来の予測がグレンジャーの意味でミカンの市場価格の上昇の原因となる。ところで、ここでさらに問題は天気予報はいかに行われているかと言うことである。実際に行われている予報は過去と現在の気象についての様々な情報と物理学的知識の組合せを基礎にしている。言いかえると、天気予報は未来ではなく現在と過去の情報の中に含まれているのである。同様のことは消費者が形成するミカンの価格予想にもあてはまる。グレンジャー因果の結果が不自然な場合、この様に何らかの意味で利用可能な情報をアド・ホック (ad hoc) に限定した理由によることが多い。

(iii) 除かれた変数の問題： 情報の範囲の問題の一つとして、二つの変数 (例えばマクロ分析における貨幣と所得) についての因果方向のみに関心があるとしよう。この時、利用可能な情報としてこの二つの変数の現在・過去の情報のみを考えた時の因果方向についての結論は分析に除かれていた変数の影響による“みせかけの因果”による可能性がある。次に挙げるものはその例である。

例1. 2 : u_{it} ($i = 1, 2, 3$) を互いに無相関なホワイト・ノイズ (White Noise) でその分散を σ_i^2 ($i = 1, 2, 3$) とする。 (X_t, Y_t, Z_t) は

$$(1.4) \quad \begin{cases} X_t = u_{1,t} + u_{3,t-2} \\ Y_t = u_{2,t} + u_{3,t-1} \\ Z_t = u_{3,t} \end{cases}$$

で与えられる, としよう。そこで X_t と Y_t のみが観測されていて, Z_t は観測されないとする。そうすると (1. 4) の第一式と第二式より,

$$(1.5) \quad X_t = Y_{t-1} + u_{1,t} - u_{2,t-1}$$

となる。故に, X_t の Y_t の過去を条件とした予測誤差の分散は, $\sigma^2(X_t | U_t) = \sigma_1^2$ となるが, これは X の分散 $\sigma_1^2 + \sigma_3^2$ よりも小さいので $Y_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ となる。他方,

$\{X_t, Y_t, Z_t\}$ のすべての変数が観測される時には (1. 4) より,

$$(1.6) \quad \begin{cases} X_t = Z_{t-2} + u_{1,t} \\ Y_t = Z_{t-1} + u_{2,t} \end{cases}$$

となるので $Z_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$, $X_t \overset{G}{\rightarrow} Z_t$ 及び, $Z_t \overset{G}{\rightarrow} Y_t$, $Y_t \overset{G}{\rightarrow} Z_t$ は明らかであろう。

例1. 3 : u_{it} ($i = 1, 2, 3$) は例1. 2と同様とする。 (X_t, Y_t, Z_t)

は

$$(1.7) \quad \begin{cases} X_t = Z_{t-1} + u_{1,t} \\ Y_t = u_{2,t} \\ Z_t = Y_{t-1} + u_{3,t} \end{cases}$$

によって決定されるとする。さらに (X_t, Y_t) のみが観測可能であって Z_t は観測不能とする。そこで (1. 7) の第3式を消去して

$$(1.8) \quad \begin{cases} X_t = Y_{t-2} + u_{1,t} + u_{3,t-1} \\ Y_t = u_{2,t} \end{cases}$$

を得る。例1. 2と同様にして予測誤差の分散を比較すると, $Y_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ かつ, $X_t \overset{G}{\rightarrow} Y_t$ となる。ところがもし (X_t, Y_t) に加えて Z_t も観測可能であるとすると予測誤差の分散の比較より明らかに $Z_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ かつ, $Y_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ となる。

(iv) 非定常性の問題: Granger (1969) は因果関係の定式化に際して, 問題となる確率過程, $\{X_t, Y_t; t = 0, \pm 1, \pm 2\}$ を定常過程に限定している。ところが多くの経済データは何らかの意味で非定常的であると考えられる。そこで非定常性を除去するやり方としては Box-Jenkins 法における階差オペレータなど何らかの形のフィルターを

用いる方法がしばしば行われる。さて予測の平均自乗誤差に基づく因果方向の定義 1.

1~1. '3は確率過程が非定常な場合にも適用可能である。しかしながら次の例は定常化のフィルターをかける操作は必ずしもグレンジャーの因果方向を不変に保たないことを示している。

例1. 4: u_{it} ($i = 1, 2$) を互いに無相関な正の値をとるホワイト・ノイズ (White Noise), v_{it} ($i = 1, 2$) と w_{it} ($i = 1, 2$) を共分散 $\text{Cov}(v_{1t}, v_{2t}) = \sigma_v$, $\text{Cov}(w_{1t}, w_{2t}) = \sigma_w$ となる確率変数としよう。(ただし, $\sigma_v \neq 0$ と $\sigma_w \neq 0$, は少なくとも成り立つものとする。) この時 (X_t, Y_t) は

$$(1.9) \quad \begin{cases} X_t = u_{1t} \exp[av_{1t} + btw_{1t}] \\ Y_t = u_{2t} \exp[cv_{2t} + dtw_{2t}] \end{cases}$$

となる確率過程としよう。ただし a, b, c, d は実定数, t はタイム・トレンドである。ここで対数変換を行い, 2次階差フィルター $(1-L)^2$ を (1.9) の左より作用させると

$$(1.10) \quad \begin{cases} (1-L)^2 \log X_t = (1-L)^2 \log u_{1t} \\ (1-L)^2 \log Y_t = (1-L)^2 \log u_{2t} \end{cases}$$

となってトレンド項の影響が消え去る。変換前の変数, X_t と Y_t の間には相関があるので一般に $X_t \xrightarrow{G} Y_t$, $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ となっている。ところが階差フィルターによる変換後の変数 $(1-L)^2 \log X$ と $(1-L)^2 \log Y$ は互いに無相関となる。したがってグレンジャーの因果方向については, $(1-L)^2 \log Y \not\xrightarrow{G} (1-L)^2 \log X$ かつ, $(1-L)^2 \log X \xrightarrow{G} (1-L)^2 \log Y$ となる。

(v) 単純予測と多段予測の問題: Granger (1969) による因果方向の定義において予測の精度を測る一つの尺度として予測の平均自乗誤差 (PMSE) が用いられている。より正確に述べるならば, これは“1期先” (one period ahead) 予測の平均自乗誤差 (MSE) であって, しばしば Final Prediction Error (略してFPE) と呼ばれる予測における一つの損失関数 (Loss Function) である。現実の予測においては1期以上先の将来を予測する場合もあり, この予測のことを1期先予測, あるいは単純予測に対して多段予測 (Multiperiod ahead Prediction) と呼んでいる。単純予測の場合と同様に一般に p -期先予測の平均自乗誤差 (PMSE (p)) を定義することができるが, この量もまた場合によっては自然な予測についての損失関数となり得る。ここで問題は1期先予測の平均自乗誤差 (PMSE (1)) に基づく因果方向は p -期先 ($p \geq 2$) 予測の

平均自乗誤差 (PMSE (p)) に基づく因果方向と必ずしも一致しないことである。その例を次に与える。

例 1. 5: 例 1. 3 を再び考えよう。時点 t において現在・過去のすべての情報 $U_t = \{X_s, Y_s, Z_s; s = t, t-1, t-2, \dots\}$ を与えた時の 1 期先及び 2 期先の X の最適予測は (1. 7) より

$$(1.11) \quad \begin{cases} E[X_{t+1} | U_t] = Z_t \\ E[X_{t+2} | U_t] = Y_t \end{cases}$$

で与えられ、その予測分散はそれぞれ、 σ_1^2 と $\sigma_1^2 + \sigma_3^2$ で与えられる。もし時点 t において X_t の 2 期先の予測量として Z_t を用いると、簡単な計算よりその予測分散は、 $\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2$ となる。

(vi) 測定誤差 (Measurement Error) の問題: 観測される経済時系列データはしばしば測定誤差あるいは観測誤差を伴っている。もし何らかの原因で測定誤差が存在する時、分析者にとって関心のあるもとの変数間でのグレンジャーの因果方向が、観測された変数間でのグレンジャーの因果方向と必ずしも一致しない可能性がある。次に挙げるのはその例である。

例 1. 6: u_{it} ($i = 1, 2$) をそれぞれ、 $N(0, 1)$ にしたがう正規確率変数であって、自己相関は持たないが、相互共分散は

$$(1.12) \quad \text{Cov}(u_{1,t}, u_{2,t-j}) = \begin{cases} 0 & (j \geq 2) \\ 1/2 & (j = 1) \\ 0 & (j \leq 0) \end{cases}$$

によって与えられるとしよう。さらに (X_t, Y_t) は

$$(1.13) \quad \begin{cases} X_t = u_{1t} \\ Y_t = Y_{t-1} + u_{2t} \end{cases}$$

によって定まる確率過程としよう。この時直ちに Y_t の過去の情報によって X_t の予測は改善できるが、その逆は起こらないことにより、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ かつ、 $X_t \not\xrightarrow{G} Y_t$ となることがわかる。そこで変数 X_t は我々が直接観測 (あるいは測定) できるが、変数 Y_t は直接観測できずに観測誤差 v_t を伴った

$$(1.14) \quad Y_t^* = Y_t + v_t$$

のみが観測されるとしよう。ただしここで v_t は $N(0, 2)$ に従う正規確率変数で、 u_{it} ($i = 1, 2$) と無関係であるホワイト・ノイズである。この時 “和の定理” より、 Y_t^*

～ARMA (1, 1) となり,

$$(1.15) \quad \begin{aligned} Y_t^* - Y_{t-1}^* &= u_{2t} + \frac{1}{2}v_t - v_{t-1} \\ &= u_{2t} - \frac{1}{2}u_{2t-1} \end{aligned}$$

と表現される。ここで u_{2t}^* は $N(0, 1)$ の正規確率変数であり、自己相関がゼロであってしかも

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(u_{1t}, u_{2t+1}^*) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 E(u_{1t} u_{2t-1}) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となることがわかる。このことより観測される変数 (X_t, Y_t) 間のグレンジャー因果方向としては、 $X_t \xrightarrow{G} Y_t$ が成立する。(II. 4節参照のこと)

(vii) 時間に関する集計 (Aggregation) の問題: マクロデータをはじめ経済データの中には時間とともに測定され集計されて用いられるものが少なくない。例えば、国民所得勘定 (新SNA体系) によって与えられる国民所得統計における四半期あるいは一年のフローの各変数や資本等のストック統計の多くは時間について集計されたデータである。一般的には原変数間におけるグレンジャーの因果方向は、時間についての集計によって保存されるとは限らない。次に示す例はこのことを示している。

例 1.7: u_{is} ($i=1, 2$) は例 1.6 と同じ確率構造 (1.12) を満たす変数とする。二つの変数 (X_t, Y_t) は

$$(1.17) \quad \begin{cases} X_s = u_{1s} \\ Y_s = .5Y_{s-1} + u_{2s} \end{cases}$$

によって与えられる。すなわち、 $Y_s \sim \text{AR}(1)$ と想定しよう。ところでこの (X_s, Y_s) の時間単位、 $s=0, 1, 2, \dots$ は細かすぎて (あるいは統計を作る当局は測定しているが)、実際に公表されて分析に用いられるデータは時間的集計量

$$(1.18) \quad \begin{cases} X_t^* = X_{2s-1} + X_{2s} \\ Y_t^* = Y_{2s-1} + Y_{2s} \end{cases}$$

であるとしよう。そこで (1.17) の第二式に左から $(1 + .5L)(1 + L)$ を乗ずると、

$$(1.19) \quad \begin{cases} X_t^* = u_{1t}^* \\ (1 - .5^2L)Y_t^* = (1 - \theta L)u_{2t}^* \end{cases}$$

と表現できる。ここで (u_{1t}^*, u_{2t}^*) は

$$(1.20) \quad \begin{cases} u_{1t}^* = u_{1,2s-1} + u_{1,2s} \\ u_{2t}^* = u_{2,2s-1} + u_{2,2s} \end{cases}$$

によって定義される確率変数である。このことから時間に関して集計された変数 $Y_t^* \sim$ ARMA (1, 1) となっていることがわかる。ところで (1.19) と (1.20) より、

$$(1.21) \quad (1 - \theta L)u_{2t}^* = u_{2,2s} + (1 + .5)u_{2,2s-1} + .5u_{2,2s-2}$$

となるのでMA表現の反転条件 (Invertibility Condition) を満たすようにして、

$$\theta = \frac{(-7+3\sqrt{5})}{2}$$

となることが簡単な計算よりわかる。さらに時間について、 u_{it}^* ($i = 1, 2$) を集計した。 u_{it}^* ($i = 1, 2$) については

$$(1.22) \quad \text{Cov}(u_{1,t}^*, u_{2,t+1}^*) = .5(\theta^2 + 2\theta) \approx -.135$$

となる。従って、時間について集計された変数 X_t^* と Y_t^* の間にはグレンジャーの因果方向について、 $X_t^* \xrightarrow{G} Y_t^*$ となることがわかる。(II. 4節参照のこと) これに対して観測されない真の変数、 X_s と Y_s の間には (1.12) よりグレンジャー因果については、 $Y_s \xrightarrow{G} X_s$ が成り立っていることは明らかであろう。

以上、グレンジャー因果性にまつわる主要な問題点を簡単な例を通して指摘してきた。この他にもNewbold (1981) はさらにいくつかの重要な問題点についての例を与えている。ここで述べたいいくつかの例はグレンジャー因果の概念と一般に我々が経済学その他で用いる因果 (Causality) の意味する物とは必ずしも一致しないことを示している。

II グレンジャー非因果性の検出法

1. 二次元定常過程

我々の分析の出発点として、 $Z_t = (X_t, Y_t)$ を二次元 (広義) 定常過程であるとする。さらに、 $\{Z_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ は純粹に非決定論的であり、その移動平均表現 (Moving Average Representation) を

$$(2.1) \quad Z_t = \sum_{s=0}^{\infty} A^{(s)} U_{t-s}$$

としよう。【注2—1】 ここで $U_t = (u_{1t}, u_{2t})$ は互いに系列相関を持たない 2×1 の攪乱項（あるいは予測誤差）ベクトルで、その平均ゼロベクトル、共分散行列は

$$(2.2) \quad v(U_t) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

である。 $\{A^{(s)}, s = 0, 1, 2, \dots\}$ は 2×2 の係数行列

$$(2.3) \quad A^{(s)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

である。便宜上 (2. 1) を

$$(2.4) \quad Z_t = A(L)U_t,$$

と表す。ただし、

$$(2.5) \quad A(L) = \begin{pmatrix} a_{11}(L) & a_{12}(L) \\ a_{21}(L) & a_{22}(L) \end{pmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} A^{(s)} L^s$$

は L の多項式を要素とする 2×2 の行列であって、 $|\lambda| < 1$ となるすべての複素数 λ について $\det |A(\lambda)| \neq 0$ となることを仮定しておく。この時 (2. 1) は反転可能 (Invertible) であるのでその自己回帰表現 (Autoregressive Representation) を

$$(2.6) \quad Z_t = \sum_{s=1}^{\infty} B^{(s)} Z_{t-s} + U_t$$

としよう。ここで、 $\{B^{(s)}; s = 1, 2, \dots\}$ は 2×2 の係数行列

$$(2.7) \quad B^{(s)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(s)} & b_{12}^{(s)} \\ b_{21}^{(s)} & b_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

の例である。(2. 6) を便宜上

$$(2.8) \quad Z_t = B(L)Z_t + U_t$$

と表すことにしよう。ここで

$$(2.9) \quad B(L) = \begin{pmatrix} b_{11}(L) & b_{12}(L) \\ b_{21}(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{\infty} B^{(s)} L^s$$

は L の多項式を要素とする 2×2 の行列である。自己回帰過程 (2. 6) が定常となる条件は、 $|\lambda| < 1$ となるすべての複素数について $\det [I - B(\lambda)] \neq 0$ となること

とであるが、ここではそれを仮定する。若干の条件の下で定常過程は自己回帰表現 (2. 6)

を持つことが知られているが、【注2—2】 ここでは詳細する。言うまでもないが、ある有限の整数 M, N に対して (2. 1) や (2. 6) において、 $A^{(s)} = 0$ ($s > M$) や

$B^{(s)} = 0$ ($s > N$) となることは許されている。実際、統計的推定や検定を行う折には有限個のパラメータを持つ定常過程を考えることになる。

2. グレンジャー検定

前節において Granger の予測に基づく因果の方向性を定義したわけであるが、一般に二つの確率変数について仮説、 $X_t \overset{G}{\rightarrow} Y_t$ を直接示すには定義 1. 1~1. 3 より、予測の平均自乗誤差を直接推定することが考えられよう。【注 2-3】 推定された予測誤差に基づいて因果方向の尺度を構成する方法は IV. 4 節で解説する。もう一つの別のアプローチとしては間接的な因果方向の検出方法としてグレンジャーの意味での非因果性 (Granger Non-Causality) を統計的に検定する方法が考えられる。二つの確率過程、 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ の間で仮説、 $Y_t \overset{G}{\nrightarrow} X_t$ が成立しているとする、 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ の過程に制約条件を課していることになる。そこで、その制約条件を統計的にテストする種々の方法が因果関係のテスト (Causality Tests) と呼ばれ、これまでに数人の計量経済学者によって提案されている。二次元自己回帰表現 (2. 6) においてはグレンジャーの非因果性の条件は次のようになることが知られている。

定理 2. 1:

$Y_t \overset{G}{\nrightarrow} X_t$ となる必要十分条件は

$$(2.10) \quad b_{12}^{(s)} = 0 \quad \text{for } s = 1, 2, \dots$$

となる自己回帰表現 (2. 6) が存在することである。

証明: (i) (2. 6) において (2. 10) が成り立っているとすると、(2. 6) の第一式は

$$(2.11) \quad X_t = \sum_{s=1}^{\infty} b_{11}^{(s)} X_{t-s} + u_{1t}$$

となる。この時、時点 t において X_t の過去の情報をもとにした X_t の最適予測は右辺第一項であり、その予測誤差は u_{1t} である。(2. 6) より、これは、 $Z_t = (X_t, Y_t)$ の過去の情報をもとにした X_t の最適予測の予測誤差に一致する。

(ii) $Y_t \overset{G}{\nrightarrow} X_t$ とする。時点 t における X_t の過去の情報をもとにした X_t の最適予測を、 $E[X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_{t-i}$ 、その予測誤差を v_{1t} とする。さらに、 $Z_t = (X_t, Y_t)$ の過去の情報をもとにした Y_t の最適予測を $E[Y_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots] = \sum_{i=1}^{\infty} d_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} e_i Y_{t-i}$ 、その予測誤差を v_{2t}

としよう。ここでもしある正整数 $j \geq 1$ について、 $E(v_{1t} Y_{t-j}) \neq 0$ であるとする。 $w_t = v_{1t} - E[v_{1t} | Y_{t-j}]$ の分散は v の分散よりも小さくなり、 $Y_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ の仮定に反する。故に、 $E[X_t | Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_{t-i}$ となることにより

$$(2.12) \quad \begin{cases} X_t = \sum_{i=1}^{\infty} c_i X_{t-i} + v_{1t} \\ Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} d_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} e_i Y_{t-i} + v_{2t} \end{cases}$$

は自己回帰表現になっていることがわかる。 || G

この命題はグレンジャーの意味での非因果性、 $Y_t \not\rightarrow X_t$ と自己回帰モデル (2.6) における制約条件 (2.10) の同等性を主張している。ここでもしある有限の正整数 p について

$$(2.13) \quad Z_t = \sum_{s=1}^p B^{(s)} Z_{t-s} + U_t$$

が自己回帰過程 (2.6) を十分に近似しているとする仮説、 $Y_t \overset{G}{\rightarrow} X_t$ は (2.13) における仮説

$$H_G : b_{12}^{(s)} = 0 \quad \text{for } s = 1, 2, \dots, p$$

によって統計的に検定することができる。仮説 H_G は p が既知のとき通常の最小自乗推定における F 統計量によって検定できる。すなわち、

(i) X_t の説明変数を $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$ とした時の回帰の残差平方和を $RRSS$ 、 X_t の説明変数を $X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}$ とした時の回帰の残差平方和を $URSS$ とする。

(ii) この時 F -統計量は

$$(2.14) \quad \hat{F} = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{n - 2p}{p}$$

で与えられる。ここで n は標本数である。

(iii) もし F -値が有意水準 $\alpha\%$ の有意点 $F(p, n-p)$ より大きければ仮説 H_G は棄却され、そうでなければ仮説 H は受容される。以上の手続きのことを グレンジャー検定

(Granger Test) と呼ぶことにする。ここで注意すべき点としては仮説 H_G の下で F は厳密には F -分布には従わずに漸近的に、 $p \cdot F \sim \chi^2(p)$ となることが知られていることであろう。しかしながら有限の標本の場合に χ^2 近似よりも F 近似を用いる方が良いとする考え方もあり得る。

次に瞬時的グレンジャーの意味での非因果性 (Instantaneous Granger Non-Causality)

の特徴づけを行う。

定理 2. 2 :

自己回帰表現 (2. 6) において, $Y \xrightarrow{IG} X$ となる必要十分条件は

$$(2.15) \quad \sigma_{12} = 0$$

である。

証明: (2. 6) において Y_t 及び Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots を条件とした時の X_t の予測の平均自乗誤差は u_{2t} を条件とした時の u_{1t} の分散

$$(2.16) \quad \sigma_{11.2} = \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 / \sigma_{22}$$

で与えられる。この誤差分散 $\sigma_{11.2}$ と X_t の Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots を条件とした時の予測の誤差分散 σ_{11} が等しいのは (2. 15) が成り立つ時に限られる。||

ところで瞬時的グレンジャーの非因果性の条件 (2. 15) は対称であることに注意すべきである。すなわち, $Y_t \xrightarrow{IG} X_t$ ならば, $X_t \xrightarrow{IG} Y_t$ であり, その逆もまた正しい。

3. シムズ検定

さて Sims (1972) はグレンジャーの非因果性の仮説, $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ についてグレンジャー検定とは異なった検定方法を提案した。次に Sims によって与えられた命題を示す。Sims の証明は幾何学的アプローチであるが, ここでは時間領域による証明を与える。証明の後半は Hatanaka (1982) によるものである。

定理 2. 3 :

自己回帰過程 (2. 6) において, $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ となる一つの必要十分条件は, $E(v_t) = 0$ であって, かつすべての, $j (\geq 0)$ に関して

$$(2.17) \quad E(X_{t-s} v_t) = 0$$

となる分布ラグ表現

$$(2.18) \quad Y_t = \sum_{s=0}^{\infty} b_s X_{t-s} + v_t, \quad \sum_{s=0}^{\infty} b_s^2 < +\infty$$

が存在することである。

証明: (i) [十分性] $Y \xrightarrow{G} X$ とする。この時, 定理 2. 2 より, $b(L) = 0$ である。任意の 2×2 正定符合行列, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ に対して, $H \Sigma H^1 = D = (d_{ij})$ が対角行列になるように, 下三角行列, $H = (h_{ij})$, $h_{12} = -\sigma_{12} / \sigma_{11}$ がとれる。

そこで

$$(2.19) \quad V_t^* = \begin{pmatrix} v_{1t}^* \\ v_{2t}^* \end{pmatrix} = H U_t,$$

$$(2.20) \quad C^{(s)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(s)} & 0 \\ c_{21}^{(s)} & c_{22}^{(s)} \end{pmatrix} \\ = HB^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_{21} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}^{(s)} & 0 \\ b_{21}^{(s)} & b_{22}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$(2.21) \quad C(L) = \begin{pmatrix} c_{11}(L) & 0 \\ c_{21}(L) & c_{22}(L) \end{pmatrix} = SB(L)$$

とおく。自己回帰表現 (2. 6) に左から H を乗ずると第一式と第二式はそれぞれ

$$(2.22) \quad [1 - c_{11}(L)]X_t = v_{1t}^*,$$

$$(2.23) \quad [1 - c_{22}(L)]Y_t = -[h_{21} - c_{21}(L)]X_t + v_{2t}^*$$

となる。故に (2. 23) より

$$(2.24) \quad Y_t = [1 - c_{22}(L)]^{-1}[-h_{21} + c_{21}(L)]X_t + [1 - c_{22}(L)]^{-1}v_{2t}^* \\ = \sum_{s=0}^{\infty} c_s X_{t-s} + v_t$$

という分布ラグ表現を得る。ところで (2. 22) より X_t は

$$(2.25) \quad X_t = [1 - c_{11}(L)]^{-1}v_{1t}^*$$

と表現できるので、すべての整数 j (> 0) に対して無相関の条件 (2. 17) を満足していることがわかる。従って (2. 24) は Sims の分布ラグ表現である。

(ii) [必要性] まず便宜上 (2. 18) において

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_s L^s = b(L) = b_0 + b_1(L)$$

と書くことにする。すると (2. 18) を (2. 6) へ代入することによって

$$(2.26) \quad \begin{pmatrix} 1 - b_{11}(L) & -b_{12}(L) \\ -b_{21}(L) & 1 - b_{22}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(L) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

を得る。ここでラグ作用素 L に関して 0 次とそうでない項を分離すれば

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}(L) & b_{12}(L) \\ b_{21}(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1(L) & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_0 & 1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1(L) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}(L) & b_{12}(L) \\ b_{21}(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(L) & 1 \end{pmatrix}]$$

となることから (2. 26) は

$$(2.27) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} b_{11}(L) + b_{12}(L)b(L) & b_{12}(L) \\ -b_1(L) + b_{21}(L) + b_{22}(L)b(L) & b_{22}(L) \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで (2. 27) の左から $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_0 & 1 \end{pmatrix}$ を乗ずると

$$(2.28) \quad \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(L) & \alpha_{12}(L) \\ \alpha_{21}(L) & \alpha_{22}(L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t}^* \\ u_{2t}^* \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで、 $\alpha_{ij}(L)$ ($i, j=1, 2$) は L の多項式であって、 $\alpha_{11}(L) = b_{11}(L) + b_{12}(L)b(L)$ 、 $\alpha_{12}(L) = b_{12}(L)$ かつ、 $u_{1t}^* = u_{1t}$ 、 $u_{2t}^* = u_{2t} - b_0 u_{1t}$ である。ここで Sims の無相関条件 (2. 17) を満たすには (2. 28) において、 u_{1t}^* と u_{2t}^* が無相関であり、かつ、 $\alpha_{12}(L) = 0$ でなければならない。従って、 $b_{12}(L) = 0$ 、すなわち、 $Y_t \neq X_t$ となるグレンジャーの条件が導かれる。||

さて二次元定常過程 $\{Z_t\} = \{X_t, Y_t\}$ において若干のスペクトル密度についての正則条件の下で Y_t を X_t の将来・現在・過去へ射影 (project) すると、【注 2-4】

$$(2.29) \quad Y_t = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s X_{t-s} + v_t$$

なる表現を得る。ここで v_t はすべての整数 s について X_{t-s} とは無相関であって $\sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s^2 < +\infty$ 。

このことより Sims の分布ラグ表現 (2. 18) は (2. 29) において線型制約条件

$$(2.30) \quad b_j = 0 \quad \text{for } j \leq 0$$

を課したものと解釈できよう。ここでもし十分に大きい正整数 M, N によって切断された分布ラグモデル

$$(2.31) \quad Y_t = \sum_{s=-M}^N b_s X_{t-s} + v_t$$

によって (2. 29) を近似することが許されるならばグレンジャーの非因果性の条件は

(2. 31) における M 個の制約

$$H_S : b_j = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, M$$

によって統計的にテストできる。分布ラグ表現 (2. 31) において仮説 H_S を検定する

方法のことは一般にシムズ検定 (Sims Test) と呼ばれている。

ところで分布ラグ表現 (2. 29) における誤差項 v_t は通常テキストで仮定するような時間について独立で同一分布に従う確率変数とみなすことはできない。というのは、

(2. 24) より

$$(2.32) \quad [1 - c_{22}(L)]v_t = v_{2t}^*$$

となり、 $v_{2t}^* = u_{2t} - h_{21}u_{1t}$ はホワイト・ノイズであるから、 v_t は自己相関を持っているからである。この自己相関をめぐってこれまでいくつかの方法が提案されている。

(i) 直接最小自乗法 (OLS) : Y_t を被説明変数、 X_t の将来・現在・過去のラグ付き変数を説明変数として (2. 29) を通常の回帰モデルとして最小自乗推定を行う。そして F-統計量

$$(2.33) \quad \hat{F} = \frac{RRSS - URSS}{URSS} \cdot \frac{n - (M + N)}{M}$$

が有意水準 $\alpha\%$ の有意点、 $F(M, n - M - N)$ よりも大きければ仮説 H_0 を棄却する。ここで $RRSS$ と $URSS$ はそれぞれ制約条件の下での残差平方和と無制約下の残差平方和である。ただしこの場合、係数パラメターの推定量は一致性を持つが、誤差の系列相関の為に有効ではない。しかも帰無仮説 H_0 の下で漸近的にも、 $M \cdot \hat{F} \sim \chi^2(M)$ とはならない。

(ii) Sims の事前フィルター (Pre-filtering) 法 : (2. 29) における誤差項 $\{v_t\}$ の系列相関を取り除く方法として Sims (1972) は原データを $(1 - 0.75L)^2$ なるフィルターを用いる方法を提案している。これは Nerlove のフィルターとも呼ばれ、米国の主要な経済時系列の系列相関を取り除く方法としてしばしば暖用されることがあるが、その根拠はあまりはっきりしていない。Mehra (1978) は Sims の方法を修正し、 $(1 - kL)^2$ ($0 < k < 1$) となるフィルターから系列相関をうまく除くことのできるように k を決めることを提案している。Sims の方法や Mehra の方法は誤差項 v_t の確率過程が二次の自己回帰過程である程度近似される場合には正当化され得るであろう。ただし (2. 32) より明らかのように $\{v_t\}$ の自己相関構造と $\{X_t\}$ や $\{Y_t\}$ の自己相関構造が同一である保証はない。従って Sims (1972) の主張するように $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ を事前フィルターにかけた後の残差の推定されたスペクトル密度が近似的にホワイト・ノイズのスペクトル密度になることによっては必ずしもフィルターの選択は正当化されない。さて、このような事前フィルターを用いた実証例は Sims の古典的論文 (Sims (1972))

を始めとして米国・その他では多数存在する。日本に関しては Sims の考えに沿って Oriani (1979), Mehra の考えに沿って Komura (1982) らがそれぞれ名目所得 (GDP) と貨幣 (M2 + CD) の間の非因果性の検討を行っている。Oriani は日本のデータについて M2 + CD から GDP への一方的因果関係があることを主張しているのに対し、Komura はその主張に対して矛盾する結果を得ている。

(iii) 一般化最小自乗法 (GLS) : より一般的に分布ラグ表現 (2.31) の誤差項 $\{v_t\}$ が p -次の自己回帰過程に従っているとしよう。ここでもし次数 p が既知であれば (2.31) を回帰モデルと解釈して Hannan (1963) や Amemiya (1973) の一般化最小自乗法を適用することが可能であろう。Hannan の方法は周波数領域において、また Amemiya の方法は時間領域において未知の誤差項の自己回帰過程を一般化最小自乗法に基づいて推定する。これらの方法で制約条件 H_S の下で、無制約条件下で求めた残差を $\{u_t^*\}$, $\{v_t^*\}$ とすれば、 F -統計量 F^* を計算することができる。この時、帰無仮説 H_S の下で漸近的には、 $M \cdot F^* \sim \chi^2(M)$ となることによって仮説をテストできる。この方法はやや計算が複雑となる。

(iv) ラグ付き変数法: ある意味でアドホックな事前フィルターに基づく Sims の方法や一般化最小自乗法ではないシムズ・テストとしてラグ付き変数法と呼ばれるものがある。分布ラグモデル (2.29) における誤差項 $\{v_t\}$ が (2.32) を満たすことに注目しよう。(2.32) における v_{2t}^* はすべての整数 s に関して X_{t-s} と無相関であって、しかも自己相関のない確率変数である。そこで (2.29) に左から $[1 - c_{22}(L)]$ を乗ずると

$$(2.34) \quad Y_t = \sum_{s=1}^{\infty} a_s^* Y_{t-s} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s^* X_{t-s} + w_t$$

となる。ここで、 $a_s^* = c_{22}^{(s)}$, $w_t = v_{2t}^*$ であって w_t は、 $Z_{t-s} = (X_{t-s}, Y_{t-s})'$ ($s > 1$) と無相関であって

$$(2.35) \quad b^*(L) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s^* L^s = [1 - c_{22}(L)]b(L)$$

である。従って (2.35) より仮説 H は (2.34) における制約条件

$$(2.36) \quad b_j^* = 0 \quad \text{for all } j < 0$$

と同等であることがわかる。(2.34) においてラグの長さを十分に大きい適当な正整数によって切断されることが近似的に許されればラグ付き変数を含んだ有限の分布ラグモ

デル

$$(2.37) \quad Y_t = \sum_{s=1}^P a_s^* Y_{t-s} + \sum_{s=-M}^N b_s^* X_{t-s} + w_t$$

におけるM個の制約条件

$$H'_s : b_j^* = 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, M$$

は統計的に検定可能である。この制約条件を帰無仮説とすると、(2.37)の最小自乗推定に基づくF検定を適用することができるが、これはシムズ・テストの一種である。この場合(2.37)における誤差項 w_t は、 $Z_{t-s} = (X_{t-s}, Y_{t-s})$ ($s \geq 1$)と無相関であるから、帰無仮説 H_0 の下で漸近的に、 $M \cdot F \sim \chi^2(M)$ に従うことがわかる

【II. 3節への補論】ここで定理2.3とそれに基づいたシムズ・テストについての一つの重要な問題に言及しておこう。本節では確率過程、 $\{Z_t\} = \{X_t, Y_t\}$ は実数値ベクトルをとる場合のみを考えてきたわけであるが、実際の応用分析においてはパネル・データなど離散値をとる変数を扱う場合もまれではない。この時、グレンジャーの非因果性の条件及びシムズの条件はChamberlain(1982)によって次のように自然に拡張されている。

定義2.1 (Granger条件) :

すべての t に対して X_t, X_{t-1}, \dots を条件とした時に X_{t+1} は Y_t, Y_{t-1}, \dots と独立である。

定義2.2 (Sims条件) :

すべての t に対して X_t, X_{t-1}, \dots を条件としたときに Y_t は X_{t+1}, X_{t+2}, \dots と独立である。

このような定義の下では一般に定理2.3で示されたようなGranger条件とSims条件の同等性は成立しない。このことは次のChamberlainの例をみることによって明らかである。

例2.1 : $\{Y_t ; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ を互いに独立で同一分布に従い、さらに、 $P(Y_t = 1) = P(Y_t = -1) = 1/2$ となる離散的確率変数の列とする。この時、 $X_t = Y_{t-1} \cdot Y_{t-2}$ によって定めると二次元確率過程、 $Z_t = (X_t, Y_t)$ は定常であることがわかる。ところがこの (X_t, Y_t) はGrangerの条件はみたしているが、Simsの条件は満たしていない。(証明は読者にまかせる。)

この例が示すように Granger 検定と Sims 検定における帰無仮説が同等性は必ずしも成り立たない。従ってこの同等性が成立するのは定常過程よりもさらに狭い範囲である。

4. Pierce-Haugh 検定

Pierce (1976) はグレンジャーの因果方向の検出の手段として相互相関関数 (Cross Correlation function) を用いることを提案している。この節ではその方法を検討することにしよう。さて、時点 t における X_t のそれ自身の過去に基づく最適な線型予測 (あるいは過去への射影, Projection) による予測誤差を v_t , Y_t のそれ自身の過去に基づく最適な線型予測 (あるいは過去への射影, Projection) による予測誤差を w_t としよう。この時, (X_t, Y_t) は

$$(2.38) \quad \begin{cases} X_t = \sum_{s=1}^{\infty} F_s X_{t-s} + v_t \\ Y_t = \sum_{s=1}^{\infty} G_s Y_{t-s} + w_t \end{cases}$$

と表現することができる。ここで v_t, w_t の分散をそれぞれ σ_1^2, σ_2^2 としよう。さらに, $F(L) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s L^s, G(L) = \sum_{s=1}^{\infty} G_s L^s$ とおけば (2.38) は

$$(2.39) \quad \begin{cases} [1 - F(L)]X_t = v_t \\ [1 - G(L)]Y_t = w_t \end{cases}$$

と書き直すことができる。ここで v_t と w_t の k 次相互相関関数 (k -th cross correlation function) を

$$(2.40) \quad \rho_{vw}(k) = \frac{E[v_{t-s} w_t]}{\sqrt{E(v_t^2)E(w_t^2)}}$$

とおくことにしよう。言うまでもなく, $E(v_t) = 0$, かつ, $E(w_t) = 0$ である。次の命題は Granger の非因果性の条件の相互相関関数による特徴づけを与えている。

定理 2.4 :

(i) もし, $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ ならば, すべての $k < 0$ について

$$(2.41) \quad \rho_{vw}(k) = 0$$

である。

(ii) もし, $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ ならば,

$$(2.42) \quad \rho_{vw}(0) = 0$$

である。

証明： 確率過程 $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ が退化 (degenerate) する場合を除いて (2. 6) と (2. 39) より

$$(2.43) \quad \begin{bmatrix} 1-b_{11}(L) & -b_{12}(L) \\ -b_{21}(L) & 1-b_{22}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(L) & \beta(L) \\ \gamma(L) & \delta(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-F(L) & 0 \\ 0 & 1-G(L) \end{bmatrix}$$

となる L の多項式, $\alpha(L)$, $\beta(L)$, $\gamma(L)$, $\delta(L)$ を一意的に定めることができる。ところでもし, $Y_t \stackrel{G}{\nrightarrow} X_t$ ならば定理 2. 1 より, $b_{12}(L) = 0$, 故に (2. 43) より, $\beta(L) = 0$ となる。この時 (2. 43) より明らかに, $\alpha(L) = 1$ となるので, $v_t = u_{1t}$ となることがわかる。他方 (2. 4) と (2. 39) より

$$(2.44) \quad \begin{aligned} w_t &= [1 - G(L)] [a_{21}(L)u_{1t} + a_{22}(L)u_{2t}] \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} c_s u_{1t-s} + \sum_{s=1}^{\infty} d_s u_{2t-s} \end{aligned}$$

と書ける。ここで $\{c_s\}$ と $\{d_s\}$ は $G(L)$, $a_{21}(L)$, $a_{22}(L)$ によって定まる実数の系列である。任意の正整数 k に対して $u_{1,t+k}$ と $U_{t-s} = (u_{1t-s}, u_{2t-s})'$ ($s = 0, 1, \dots$) は無相関であるから

$$E[v_{t+k} w_t] = 0$$

となることより (2. 41) が示される。(2. 42) は定理 2. 2 より明らかである。

||

さて, Pierce-Haugh (1976) はさらに瞬時的 Granger の因果方向の特徴づけとして, $Y_t \stackrel{G}{\nrightarrow} X_t$ の必要十分条件が, $\rho_{vw}(0) = 0$ であることを主張した。(彼等の定理 4. 1) しかしながらこの命題は誤りであることが次の Price (1979) の反例によって示された。

例 2. 2: $Z_t = (X_t, Y_t)$ が二次元移動平均過程 (2. 1) に従い, さらに

$$A(L) = \begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{4})L \\ \sum_{s=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^s L^{s+1} & 1 - (\frac{1}{4}) \sum_{s=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{s-1} L^s \end{bmatrix}$$

であって, $U_t = (u_{1t}, u_{2t})$ は平均 0, 共分散行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{7}{8}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \sigma^2 > 0$$

を持つとする。この時, 簡単な計算より

$$E[X_t Y_t] = -\frac{\sigma^2}{16}$$

となるので、 $\rho_{XY}(0) = 0$ となる。ところで、 $\det [A(L)] = (1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\lambda^2) / (1 - \frac{1}{4}\lambda)$ の根は単位円外にあるので移動平均過程は反転可能であってその自己回帰表現は (2.6) において

$$B(L) = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_{11}^{(s)} L^s & \sum_{s=1}^{\infty} b_{12}^{(s)} L^s \\ \sum_{s=1}^{\infty} b_{21}^{(s)} L^s & 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_{22}^{(s)} L^s \end{bmatrix}$$

となる。故に、 $X_t \xrightarrow{IG} Y_t$ かつ、 $Y_t \xrightarrow{IG} X_t$ となる。

Pierce (1976) は上に述べた定理 2.4 を基礎にして次の様な Granger の非因果性の検出方法を提唱した。

(i) まず十分に大きい p, q を用いて (2.38) を近似して、

$$(2.45) \quad \begin{cases} X_t = \sum_{s=1}^p F_s X_{t-s} + v_t \\ Y_t = \sum_{s=1}^q G_s Y_{t-s} + w_t \end{cases}$$

という有限のパラメーター表現を得る。次に Box-Jenkins 法によって (2.45) の未知パラメーターを推定する。

(ii) 推定残差、 $\hat{v}_t = X_t - \sum_{s=1}^p \hat{F}_s X_{t-s}$ と、 $\hat{w}_t = Y_t - \sum_{s=1}^q \hat{G}_s Y_{t-s}$ より標本相互相関関数、 $\rho_{vw}(k)$ を計算する。

(iii) 次に十分に大きい M に対して Haugh の統計量

$$(2.46) \quad U_M = n \sum_{k=-M}^{+1} \hat{\rho}^2(k)$$

を計算し、 U_M が自由度 M の χ^2 分布の $100\alpha\%$ 点よりも大きければ水準 α で帰無仮説

$$H_0 : \rho_{vw}(k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M)$$

を棄却する。この検定方法は Pierce-Haugh 検定 として知られている。この方法を実証分析へ応用した例としては米国で Pierce などの研究がいくつかあり、日本における所得 (GDP) と貨幣 (M1 及び M2 + CD) の関係の分析へ適用したものとしては Kama (1982) が挙げられる。Kama は日本の貨幣と所得のグレンジャー因果関係について Komura (1982) と同様の結論を得ている。

ところで、以上述べた Pierce-Haugh 検定は Granger の非因果性の検定方式の一つ

として解釈するには一つの問題をはらんでいる。それを理解する為にここで v_t と w_t の相互相関関数に関する仮説を次のように分類しよう。

[PH1] Y_t は Granger の意味で X_t の原因ではない, $Y_t \not\stackrel{G}{\rightarrow} X_t$ 。この時すべての $k < 0$ に対して, $\rho_{vw}(k) = 0$ 。

[PH2] X_t は Granger の意味で Y_t の原因ではない, $X_t \not\stackrel{G}{\rightarrow} Y_t$ 。この時すべての $k > 0$ に対して, $\rho_{vw}(k) = 0$ 。

[PH3] $Y_t \stackrel{G}{\rightarrow} X_t$ かつ, $X_t \stackrel{G}{\rightarrow} Y_t$ 。この時すべての $k > 0$, 及び $k < 0$ に対して, $\rho_{vw}(k) = 0$ 。

[PH4] Y_t は瞬時的 Granger の意味で X_t の原因ではない, $Y_t \not\stackrel{IG}{\rightarrow} X_t$ (故に, $X_t \stackrel{G}{\rightarrow} Y_t$)。この時, $\rho_{vw}(0) = 0$ 。

[PH5] 二つの確率過程 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ が独立であるならば, すべての整数に対して $\rho_{vw}(k) = 0$ 。

以上の5つの仮説の中でPH5は“独立性の仮説”として時系列解析においては知られている。Haugh (1976) は仮説PH5の下で $\hat{\rho}_{vw}(k)$ が漸近的に $N(0, \frac{1}{n})$ に従うことを用いて検定統計量として(2.46)の U_M や

$$(2.47) \quad S_M = n \sum_{k=-M}^M \hat{\rho}_{vw}^2(k)$$

を提案したのである。独立性の帰無仮説の下で U_M と S_M は漸近的に $\chi^2(M)$, $\chi^2(2M+1)$ にそれぞれ従う。しかしながら仮説PH1の下では統計量 U_M は漸近的にも χ^2 -分布に従わない。実際, McLeod (1979) の結果によれば帰無仮説の下でその分布は χ^2 -分布とは相当異なっている。このことから Pierce-Haugh 検定は統計的手続きとして大きな問題があることがわかる。

さて, ここで我々は Pierce-Haugh が提案した標本相互相関関数による分析が全く意味がないと主張しているわけではない。仮説H を検定する漸近的に正当化された方法はいまだに構成されていない。しかしながら, 現実に行われる有限の標本から求められた相互相関関数はデータ解析の上で有益な情報を与えてくれると期待され得るであろう。

5. 検定方法の比較

これまで Granger の非因果性の検定方法として提案されてきたいくつかの方法を説明した。主なものを挙げると, (a) Granger 検定, (b) OLS による Sims 検定, (c) 事前フィル

ターによる Sims 検定, (d)GLSによる Sims 検定, (e)ラグ付き変数法による Sims 検定, (f) Pierce-Haugh 検定, などである。この中で既にⅡ. 2節とⅡ. 4節で指摘したように (b)と(f)については帰無仮説の下で検定統計量の漸近分布が不明瞭であることが知られている。従って, 通常の検定方法の基準に照らしてこれら二つの方法には欠陥がある。そこでこれらをリストから除くと残された検定方法としては, (a), (c), (d), (e)があるが, これらはいずれも最終的には回帰モデルにおける係数パラメターのゼロ制約条件の検定に帰着されている。ところでこのタイプの検定方法に関しては一般的に次の二つの点に留意しておく必要がある。

(i) 帰無仮説の下での検定統計量の基準分布としてF分布か χ^2 分布のどちらを選択するか。

(ii) 回帰モデルの残差平方和を基準とした検定統計量のタイプとしてワルド型統計量 (Wald Test), 尤度比型統計量 (Likelihood Ratio Test), あるいはラグランジュ乗数型統計量 (Lagrangian Multiplier Test) のいずれを選択するか。

さて, (i) については Granger 検定の所で触れたが現在の所, 結論は出ていない。統計的漸近理論からは χ^2 分布が正当化されるが, 通常のマクロ経済データのように小標本の場合にはF分布の方が近似として良いという研究結果も存在する。【注2—5】 次に問題(ii)に関して Granger 検定を例にとって考えてみよう。まず, $\hat{\sigma}_R^2$ を帰無仮説 H_G の下での分散の推定量, $\hat{\sigma}_U^2$ を対立仮説の下での分散の推定量としよう。 $\hat{\sigma}_R^2$ と $\hat{\sigma}_U^2$ はともに残差平方和 $RRSS$ と $URSS$ を標本数 n で基準化したものである。この時, (2.

14) で与えられたF統計量は定数を除いて Wald 型統計量

$$(2.48) \quad W = n \frac{\hat{\sigma}_R^2 - \hat{\sigma}_U^2}{\hat{\sigma}_U^2}$$

とみなすことができる。これに対して尤度比型統計量は

$$(2.49) \quad R = n \log \frac{\hat{\sigma}_R^2}{\hat{\sigma}_U^2}$$

で与えられ, Lagrange-乗数型統計量は

$$(2.50) \quad L = n \frac{\hat{\sigma}_R^2 - \hat{\sigma}_U^2}{\hat{\sigma}_R^2}$$

で与えられることは, 我々のモデルはラグ付き変数を含んだ回帰モデルと同等であることから知られる。【注2—6】 これらの三つの統計量 W, R, L はいずれも帰無仮説 H_G

の下で漸近的に χ^2 分布に従うが、有限の標本においては確率 1 で不等式

$$(2.51) \quad W \geq R \geq L \geq 0$$

が成立する。従って三つの統計量の中で Wald 型検定が与えられた有意水準の下で最も帰無仮説 H_0 を棄却する傾向にあり、逆に Lagrange-乗数型検定 L は最も帰無仮説 H_0 を受容する傾向にあることがわかる。もしも L が χ^2 分布の有意点よりも大きければ自動的に W と R も棄却域に入り、 W が有意点よりも小さければ必然的に R と L も受容域に入ることになる。全く同様にして Sims 検定における種々の統計量についても三つのタイプ、Wald 型・尤度比型・Lagrange-乗数型が考えられ、その間には前述の問題が生じることになる。実際のデータ分析においてはしばしばある検定方式による結果が W , R , L の内どの型のテストを用いるかに依存することがみうけられる。

一般に検定方式の比較に関しては、通常の Neyman-Pearson 流の考え方によると、(i) 統計量の分布から計算される漸近的有意水準と現実に得られる棄却率の割合（第一種の過誤）の差、(ii) 検定の検出力（第二種の過誤）などの基準が考えられる。これまでに挙げたグレンジャー非因果性の仮説についてのいくつかの検定方式の比較については Geweke-Meese-Dent (1983) はモンテ・カルロ実験によっていくつかの興味ある主張を述べているので、それについて簡単に触れておこう。彼等の研究では正しいモデルとして

$$(2.52) \quad \begin{cases} (1-.5L)X_t = 1.0 + u_{1t} \\ (1-.75L)Y_t = 1.0 + 0.291X_{t-1} + u_{2t} \end{cases}$$

を考えている。ただし、 $u_t = (u_{1t}, u_{2t}) \sim N(0, I)$ とする独立なホワイト・ノイズである。つまり、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ は正しいが、 $X_t \xrightarrow{G} Y_t$ は誤っている状況を想定している。この様な実験計画の下でグレンジャー非因果性の各種テストの Wald 型統計量が χ^2 分布から構成された 10% (5%) の棄却域に入る回数をパーセントで示したものが次表である。

表 2. 1

検定方法 仮説	(a)	(e)	(d) (Hannan の 方法による)	(d) (Amemiyaの 方法による)
I ($Y_t \xrightarrow{G} X_t$)	14 (7)	14 (5)	21 (10)	38 (29)
II ($X_t \xrightarrow{G} Y_t$)	82 (76)	82 (82)	98 (97)	—

ここでモデル(2.52)において仮説Ⅰは正しい仮説であり、仮説Ⅱは誤った仮説である。したがって、表の上段は現実には得られた第一種の過誤に対応し、下段は第二種の過誤に対応している。これと同じようなモンテ・カルロ実験が Guilkey-Salemi (1982) によっても行われている。これら二つの研究での主張を簡単に要約すると、(i) Pierce-Haugh 検定の結果はあまり信頼性がない。

(ii) Granger 検定とラグ付き変数に基づく Sims 検定はほぼ信頼性のある検定方式である。

(iii) 事前フィルターによる Sims 検定及びGLSによる Sims 検定は棄却域の構成に際して大きなバイアス(第一種の過誤)を生じる可能性がある。

以上の主張の中で(i)については理論的にも確かめられている。(ii)と(iii)、特に Granger 検定の信頼性については他のいくつかの研究によっても支持されている。しかしながらこの様な主張は、

(i) モデルの定式化の誤り、とくにラグの長さの選択の影響

(ii) 事前フィルター法における Filter の選択の影響

(iii) モンテ・カルロ実験が小規模であること

などを考慮するとなお一般的結論とはいえないであろう。グレンジャーの非因果性の検定方法の比較の研究はまだ始まったばかりであり、今後多くの課題を残している。

Ⅲ 実例 (日本における実質所得と貨幣)

1. データ

前節で解説したグレンジャー非因果性のテストの実例として、日本における“実質”所得と貨幣ストックの関係の分析例を紹介する。我々のこの分析で用いたデータは経済企画庁発表の「国民経済計算」(昭和58年度版)における実質国内総生産(Real Gross Domestic Product, 略してRGDPと呼ぶ)及び日本銀行発表のM2+CDの四半期データである。M2+CDはマクロ理論との整合性を保つために「経済統計年報」の月次平均残高(Monthly Average Outstanding)を用いることにした。未残高と違って1968年Q1(第一四半期)までしか遡れないのですべてのデータ期間を1968Q1~1982Q1とした。

(全データは章末の表3.1に与えられている。)RGDPの原系列をプロットしてみたものが図3.1であるがトレンドとともに変動幅が拡大する傾向が観察される。この分散

不均一性 (Heteroscedasticity) を取り除く為に対数変換を行い、それをプロットしたのが図 3. 2 である。同様にして M2 + CD の原系列の対数変換値をプロットしたものが図 3. 3 である。

〈図 3. 1 ~ 3. 3 を参照〉

図 3. 2 より対数変換後の R GDP はほぼ分散均一 (Homoscedastic) なデータと考えると良いであろう。対数変換後のデータ $\text{Log}(\text{R GDP})$ と $\text{Log}(M2 + CD)$ の標本自己相関関数 (Sample Autocorrelation Function, 以下 ACF と略する)、及び、標本相互相関関数 (Sample Cross Correlation Function, 略して CCF) の計算結果を図 3. 4 ~ 3. 6 に与えた。時系列分析においてはよく知られているように、非定常なデータの標本 ACF はトレンドによって支配され、強い正の相関関係が全てのラグにわたっていることが確認される。R GDP と M2 + CD の標本 CCF もやはりトレンドによって支配され、一見して全てのラグにわたって強い正の関係を示していることが見てとれる。

〈図 3. 4 - 図 3. 6 を参照〉

こうしたトレンド項を処理する方法としてはいくつか提案されているが、ここでは回帰分析の説明変数として時間変数 (TIME) をまず説明変数として用いることにした。図 3. 2 と図 3. 3 である程度はっきりしているようにトレンドは 1973 ~ 1974 年を境界として変化している。そこでオイル・ショックダミー変数 (D) として

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{if } 1968Q1 \geq t \geq 1973Q4 \\ 1 & \text{if } 1974Q1 \geq t \geq 1982Q1 \end{cases}$$

を導入し、 D_t 及び、 $DTIME_t = D_t \cdot TIME_t$ を説明変数とした。一つの解釈としてはこの分析の範囲外であるオイル・ショックによる生産構造の変化によって潜在成長率が変わったものと考えられるかもしれない。実際、表 3. 2 と表 3. 3 から $DTIME_t$ の係数は $R GDP_t$ の場合マイナス 1% で、 t 値は有意であり、M2 + CD についても t 値は有意である。

次に季節性の処理の問題であるが、我々は公表されている季節調整済みデータは使用しなかった。その主な理由はグレンジャーの因果性といった時間の前後の関係を分析する際には、変数間のグレンジャー因果の関係を不明瞭にするようなフィルターを用いることは避けるべきであると考えたことによる。(第 I 節の例 1. 4 を参照のこと。) ちなみに、通常季節調整法として使用されているセンサス XII 法は極めて複雑なフィルターを用いている。さて、 $R GDP_t$ の原系列は極めて明瞭な季節性が見受けられる。(図 3. 2) 他

方, $M2 + CD$ の原系列については季節性はあまり明瞭とは言い難い。そこで三つの季節ダミー変数として $D1_t$, $D2_t$, $D3_t$ を説明変数として加えることにした。次の表 4. 2 と表 4. 3 はそれぞれ $RGDP$ と $M2 + CD$ を被説明変数とし, 定数項 (C), 季節ダミー変数 ($D1, D2, D3$), トレンド ($TIME$), オイル・ショックダミー ($D, DTIME$) を説明変数として回帰分析を行った結果である。

(表 3. 2 ~ 3. 4 を参照)

$RGDP$ の方程式に関しては季節ダミー変数を含めてすべての説明変数の係数の t -値は有意である。他方, $M2 + CD$ の方程式に関しては季節ダミー変数はいずれもその t -値は有意とはならない。季節変動が少ないことは原系列の対数変換値のグラフ, 図 3. 3 より容易に確認される。そこで $M2 + CD$ については季節ダミーを除いて回帰分析を行った結果を表 3. 4 と図に示す。係数パラメーター推定値等の数値にはほとんど変化は見られなかった。このような回帰の手続きによってシステムティックなトレンドと季節変動を取り除くと, 残差は二つの変数 $RGDP$ と $M2 + CD$ の近似的に定常な確率過程の実現とみなすことが許されるであろう。二つの系列の最小自乗残差をプロットしたのが図 3. 7, 図 3. 8 である。いずれの系列も顕著なトレンドと季節性は見出すことはできない。さらに図 3. 9 と図 3. 10 は $RGDP_t$ の残差より計算された標本 ACF と標本偏自己相関関数 (Sample Partial Autocorrelation Function, 略して PACF) であり, 図 3. 11 と図 3. 12 は $(M2 + CD)_t$ の残差より計算された標本 ACF と標本 PACF である。図 3. 13 は $RGDP_t$ と $M2 + CD_t$ の最小自乗残差より計算された標本 CCF である。CCF は負のラグにおいて比較的大きな値をとっている。すなわち, $RGDP_t$ の将来の値と $M2 + CD$ の過去の値の相関が強いことを示している。いずれの標本 ACF, PACF も週期的に変動しつつ, ラグとともにその絶対値は減少していることがわかる。従って自己回帰 (AR) 表現である程度二つの確率過程を近似することが許されよう。

(図 3. 7 ~ 3. 13 を参照)

2. グレンジャー非因果性のテストの結果

自己回帰モデルに基づくテストの一つの重要な問題は自己回帰モデルの次数の選択である。明らかに有限のデータから無限のパラメーターを推定することは不可能である。そこで

トレンドと季節ダミー変数を含む次数 p の自己回帰モデル

$$(3.1) \quad \log X_t = \alpha_1 + \alpha_2 D + \alpha_3 D1 + \alpha_4 D2 + \alpha_5 D3 + \alpha_6 TIME + \alpha_7 DTIME \\ + \sum_{i=1}^p \beta_i \log X_{t-i} + u_t$$

を想定する。ここで変数 X_t はRGDPあるいは $M2 + CD$ である。次数 p の選択の方法についてはいくつかの基準が提案されているが、ここでは赤池の情報量基準 (AIC) を用いることにした。(3.1)のAICは

$$(3.2) \quad AIC(p) = -2 \text{ Log (最大尤度)} + 2k$$

によって与えられる。ここで k は未知パラメーターの数であって (2.53) においては、 $k = p + 7$ となる。AICの第一項はモデルのデータに対するフィットの良さを表し、第二項はパラメーター数の増加に対するペナルティである。AICが最小となる次数 p の選択方法はある種の最適性を持つことが知られている。(Shibata (1980)) そこで二つの変数RGDPと $M2 + CD$ に対してモデル (2.54) をフィットした時のAICの値を表3.5で示す。この表よりAICを最小にする次数はRGDPについては、 $p = 6$ 、 $M2 + CD$ については、 $p = 2$ 、となることがわかる。そこで我々は2変量自己回帰モデルの次数を6とした。【注3-1】

〈表3.5を参照〉

(i) グレンジャー・テスト

次数6次の2変量自己回帰モデルによってII. 2節で説明したグレンジャー・テストを行った。ただし説明変数としてタイム・トレンドと季節ダミー変数とオイル・ショック・ダミー変数を含んだモデルを推定した。帰無仮説 $H^{(1)}: M2 \xrightarrow{G} RGDP$ に対しては、

$$RRSS = .48237 \times 10^{-2}, \quad URSS = .290243 \times 10^{-2} \text{ となった。従って}$$

$$\hat{F} = \frac{.4824 - .2902}{.2902} \times \frac{32}{6} \cong 3.53$$

より、1%の有意水準で仮説 $H^{(1)}$ は棄却される。同様にして帰無仮説 $H^{(2)}: RGDP \xrightarrow{G} M2$ に対しては、 $RRSS = .14135 \times 10^{-2}$ 、 $URSS = .100705 \times 10^{-2}$ となった。従って

$$\hat{F} = \frac{.14135 - .10071}{.10071} \times \frac{32}{6} \cong 2.15$$

となって仮説 $H^{(2)}$ は10%の有意水準では棄却されるが、5%では受容される。以上の結果は自己回帰モデルの次数を6から4へ変更しても変化はなかった。

ここで最小自乗推定によってフィットされたデータの残差をモデルの妥当性を検討する為に計算した。対立仮説の下でのRGDP変数の残差の標本ACFは図3.14、 $M2 + CD$ 変数の残差の標本ACFは図3.15にそれぞれ示されている。前者のACFはラグ14期を除いてその絶対値はほぼ0.2以下であり、後者のACFはその絶対値はすべて0.15以下に収まっている。トレンド変数とダミー変数を除いた自由度は $m = 57 - 7$

=50 より $2.0 \times (1/\sqrt{m}) \cong .283$ となるが、計算された標本 ACF はこの数値よりも小さくなっている。

〈図 3. 14・3. 15 を参照〉

(ii) ラグ付き変数法による Sims テスト

II. 3節で説明した Sims テストを RGDP と M2 + CD の二変数に適用してみた。Sims テストとして考え得る方法はいくつかあるが、我々のプログラム上の制約からラグ付き変数法と Cochrane-Orcutt (コ克蘭・オーカット) 法の二種類を試みた。説明変数としてラグ付き変数の他にタイム・トレンド、季節ダミー、及びオイル・ショック・ダミー変数を含んだモデルを用いたのは Sims (1972) に沿っている。ただし Sims は季節調整済みデータを用いながらもさらに季節ダミー変数を用いている点で方法的に必ずしも整合的ではないことを付け加えておこう。ラグの次数は将来・過去ともに四期とした。四期とした理由は特にないが、あまり多くのラグはデータ数の制約から推定の自由度が非常に小さくなることは望ましくない。

帰無仮説 $H^{(1)}$: $M2 \xrightarrow{G} RGDP$ の仮説に対しては $RRSS = .776386 \times 10^{-3}$, $URSS = .541351 \times 10^{-3}$ となった。従って

$$\hat{F} = \frac{(.776386 - .541351)}{.541351} \times \frac{(49 - 20)}{4} \cong 3.148$$

となって仮説 $H^{(1)}$ は 5% の有意水準で棄却された。他方、帰無仮説 $H^{(2)}$: $RGDP \xrightarrow{G} M2$ に対しては $RRSS = .451457 \times 10^{-2}$, $URSS = .397334 \times 10^{-2}$ となる。従って

$$\hat{F} = \frac{(.451457 - .397334)}{.397334} \times \frac{(49 - 20)}{4} \cong .9866$$

となって仮説 $H^{(2)}$ は 10% の有意水準においても受容されることがわかる。

グレンジャー・テストと同様に最小自乗推定残差によってある程度モデルの妥当性を調べられる。図 3. 16 は説明変数を M2 + CD とした時の残差の標本 ACF をプロットしたものである。図より明らかのように、なおかなりの自己相関が存在することが観察される。

〈図 3. 16 を参照〉

(iii) コ克蘭・オーカット法による Sims テスト

II. 3節で見てきたように Sims の分布ラグ表現の誤差項には系列相関が存在する。通常、系列相関のある誤差項を持つ回帰モデルにおいては系列相関を除く方法としてコ克蘭・オーカット法 (C-0 法と略する) がしばしば用いられる。そこで我々は C-0 法によって分布ラグの自己相関を除く方法を試みた。帰無仮説 $H^{(1)}$: $M2 \xrightarrow{G} GDP$ については、

RRSS = .11738 × 10⁻², URSS = .5835 × 10⁻³ となった。従って

$$\hat{F} = \frac{1.1738 - .5835}{.5835} \times \frac{32}{4} \cong 8.09$$

となって有意水準1%で棄却される。他方、帰無仮説H⁽²⁾: RGD P → M2 + CD^G に対しては RRSS = .7365 × 10⁻², URSS = .4857 × 10⁻²となる。従って

$$\hat{F} = \frac{.7365 - .4857}{.4857} \times \frac{32}{4} \cong 4.157$$

となって1%有意水準で仮説H⁽²⁾は棄却されることがわかった。

この場合についても最小自乗推定 (OLS) 残差とC-0 法による残差を特にRGDPを説明変数とする推定式について計算した。この二つの残差系列より計算された標本ACFを図3. 17と図3. 18に示した。C-0 法による残差の標本ACFはOLS残差と比べて0次の相関係数の絶対値が減少している他には自己相関を取り除いているようにはみうけられない。C-0 法については制約条件の下でか、或いは無制約条件の下で標本相関係数を用いるかが意見の分かれる所であろう。どちらかを用いるかによつて結論が変わりうる。通常は帰無仮説の下で標本相関係数をもとめる方法が自然であろう。

さて以上例からも明らかのように、我々の限られた経験からは Sims 検定において系列相関を除くべく提案された諸方法に関してその有効性に疑問をなげかけるような結果も起きているようである。

〈図3. 17・図3. 18を参照〉

IV 周波数領域における因果方向の検出

1. Geweke の因果尺度

我々はすでにⅢ節において二つの変数間におけるグレンジャーの意味での一方的因果関係をグレンジャー-非因果性仮説の検出という手続きによって分析できることをみてきた。そこで導入された統計的検定の方法はいずれもグレンジャーの非因果性仮説が時系列モデルの確率構造に対する強い制約条件となっていることに基づくものである。さてグレンジャーのY_t からX_t への非因果性の仮説が受容された場合には、Y_t からX_t への因果方向はゼロであるとみなせる。他方、もしグレンジャーのY_t からX_t への非因果性の仮説が棄却された場合には次の問題としてはそれでは一体変数Y_t からX_t への因果方向の強さはどの程度かが関心となろう。Granger-Hatanaka (1964) はすでに因果方向の強度に

ついてある示唆を与えているが, Geweke (1982) はより厳密に次のような因果方向の尺度を提案している。ここで再び, $Z_t = (X_t, Y_t)$ の自己回帰表現 (2. 6) と変数 X_t, Y_t のそれぞれの過去に基づく最適予測の自己回帰表現 (2. 38) を考えてみよう。さらに (2. 6) における予測誤差 U の共分散行列, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ と (2. 38) における予測誤差 v_t, w_t の分散 σ_1^2, σ_2^2 とおく事にしよう。

定義 4. 1:

(i) Y_t から X_t へのフィード・バック尺度:

$$(4.1) \quad F_{Y \rightarrow X} = \ln(\sigma_1^2 / \sigma_{11}).$$

(ii) X_t から Y_t へのフィード・バック尺度:

$$(4.2) \quad F_{X \rightarrow Y} = \ln(\sigma_2^2 / \sigma_{22}).$$

(iii) 瞬時的フィード・バック尺度:

$$(4.3) \quad F_{X \cdot Y} = \ln(\sigma_{11} \sigma_{22} / |\Sigma|).$$

(iv) 線型従属尺度:

$$(4.4) \quad F_{X, Y} = \ln(\sigma_1^2 \sigma_2^2 / |\Sigma|).$$

以上の尺度は次のような直線的解釈が可能である。常に, $\sigma_1^2 \geq \sigma_{11}$ かつ, $\sigma_2^2 \geq \sigma_{22}$ であるからフィード・バック尺度 $F_{Y \rightarrow X}$ と $F_{X \rightarrow Y}$ はともに非負である。また, $\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = |\Sigma|$ より $F_{X \cdot Y}$ は非負, 従って $F_{X, Y}$ も非負となる。もし, $Y_t \overset{G}{\nrightarrow} X_t$ が成立すると (2. 6) の $b_1(L) = 0$ (定理 2. 1 より) となるので, $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, すなわち $F_{Y \rightarrow X} = 0$ となる。グレンジャーの非因果性が成立すると因果尺度がゼロとなるのは自然な尺度の定義といえよう。全く同じように, もし $X_t \overset{G}{\nrightarrow} Y_t$ が成立すると, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$ より, $F_{X \rightarrow Y} = 0$ となる。実際この $F_{X \rightarrow Y}$ と $F_{Y \rightarrow X}$ は瞬時的因果を除いた場合には Granger (1969) の提案した因果強度の単調増加関数になっている。もし, 自己回帰表現 (2. 6) において誤差項 u_{1t} と u_{2t} が無相関 ($\sigma_{12} = 0$) ならば (2.15) より瞬時的フィード・バック尺度 $F_{X \cdot Y} = 0$ となる。従ってこの場合には二つの変数 X_t と Y_t との因果方向の分解は二つのフィード・バック尺度 $F_{X \rightarrow Y}$ と $F_{Y \rightarrow X}$ のみから成り立つことになる。II. 2 節でみてきたように変数 X_t から変数 Y_t への瞬時的因果は Y_t から X_t への瞬時的因果と同等である。このことから瞬時的フィード・バック尺度の対称性, $F_{X \cdot Y} = F_{Y \cdot X}$ は自然な条件であることがわかる。もし, $\sigma_{12} = 0$ であってかつ, $\sigma_{11} = \sigma_1^2, \sigma_{22} = \sigma_2^2$ であれば二つの確率過程 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ は互いに独立となる。従ってこの時二つの変

量間の従属関係は全く欠けているので線型従属尺度 $F_{X,Y} = 0$ となる。さて、定義 4. 1 で挙げたいくつかの尺度の間には次のような関係が成立する。

定理 4. 1 :

線型従属尺度 $F_{X,Y}$ は次のように分解される。

$$(4.5) \quad F_{X,Y} = F_{X \rightarrow Y} + F_{Y \rightarrow X} + F_{X \cdot Y} .$$

証明： 定義 4. 1 より明らか。 | |

この Geweke の因果尺度の加法分解定理とも呼ぶべき命題は一般に二つの変数間の線型従属関係を表す尺度 F が X から Y への因果方向、 Y から X への因果方向、 X と Y との瞬時的因果という三つの方向へ分解されることを示している。(4. 5) より攪乱項が互いに無相関ならば瞬時的関係が無視できて、線型従属尺度 $F_{X,Y}$ は X から Y への因果方向と Y から X への因果方向へと加法的に分解され得る。これはとりもなおさず次に IV. 2 節で述べる RPC 分解が正当化される状況を意味している。

ここで再び III 節の例に戻って Geweke による因果尺度を実際に計算してみよう。自己回帰表現のラグの次数は最小 AIC 基準で選び、 $p = 6$ と決定した。さて \hat{v} 、 \hat{w} をそれぞれ

(2. 38) を最小自乗法によって推定した時の $n \times 1$ の残差ベクトルとすれば、 \hat{v} と \hat{w} の分散の推定値は

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{v}'\hat{v}}{n} \\ \quad = \frac{.482372 \times 10^{-2}}{51} = .9458 \times 10^{-4}, \\ \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\hat{w}'\hat{w}}{n} \\ \quad = \frac{.141352 \times 10^{-2}}{51} = .2772 \times 10^{-4} \end{array} \right.$$

で与えられる。また \hat{u}_1 、 \hat{u}_2 をそれぞれ (2. 6) からの $n \times 1$ の残差ベクトルとすると共分散行列の推定値は

$$(4.7) \quad \hat{\Sigma} = (\hat{\sigma}_{ij}) = \frac{1}{n} (\hat{v}'_i \hat{v}'_j) \\ = \begin{pmatrix} .5691 \times 10^{-4} & .3208 \times 10^{-5} \\ .3208 \times 10^{-5} & .1975 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

であるので

$$(4.8) \quad \det(\hat{\Sigma}) = \hat{\sigma}_{11}\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ = .11137 \times 10^{-8}$$

となる。従って定義4. 1よりフィード・バック尺度を計算すると、

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{F}_{X,Y} = \ln\left(\frac{.9458 \times .2772}{.1114}\right) = .8559, [.3603, 1.345], \\ \hat{F}_{Y \rightarrow X} = \ln\left(\frac{.9458}{.5691}\right) = .5080, [.1284, .8815], \\ \hat{F}_{X \rightarrow Y} = \ln\left(\frac{.2772}{.1975}\right) = .3390, [.0314, .6406], \\ \hat{F}_{X \cdot Y} = \ln\left(\frac{.5691 \times .1975}{.11137}\right) = .0176, [-.049, .1494], \end{array} \right.$$

となる。カッコ内の数値は近似された95%信頼区間であって、それぞれ

$$(4.10) \quad \left\{ \left[\left(\hat{F} - \frac{P-1}{3n} \right)^{1/2} - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right]^2 - \frac{2P+1}{3n}, \left[\left(\hat{F} - \frac{P-1}{3n} \right)^{1/2} + \frac{1.96}{\sqrt{n}} \right]^2 - \frac{2P+1}{3n} \right\}$$

によって計算されたものである。【注4-1】ここでそれぞれ尺度全体の従属関係への貢献度をその線型従属尺度 $\hat{F}_{X,Y}$ に対する比によってRFPと定義すれば、

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{RFP}(Y \rightarrow X) = \frac{\hat{F}_{Y \rightarrow X}}{\hat{F}_{X,Y}} = .5935, \\ \text{RFP}(X \rightarrow Y) = \frac{\hat{F}_{X \rightarrow Y}}{\hat{F}_{X,Y}} = .3961, \\ \text{RFP}(X \cdot Y) = \frac{\hat{F}_{X \cdot Y}}{\hat{F}_{X,Y}} = .0206 \end{array} \right.$$

となる。これらの数値から気付く点としては次の二点がある。

(i) 瞬時的因果関係の全体に対する貢献は小さくて2%程度である。このことは共分散行列の推定値より計算された標本相関係数 $\hat{\rho} = q_2 / \sqrt{(q_1 q_2)} \cong .1$, あるいは、 $\hat{F}_{X,Y}$ の95%信頼区間に0が含まれていることによっても裏付けられる。

(ii) Y_t から X_t への因果尺度が X_t より Y_t への因果尺度よりも大きい。しかしながら両者の尺度はともに有意にゼロではない。

従って、このような尺度の数値からみる限りこの例について実質国内総生産 (RGDP) から貨幣 (M2 + CD) への非因果性の仮説が多くの検定方法によって受容され得なかったのは当然といえるであろう。

2. RPC分解

Granger-Hatanaka (1966) の尺度や Geweke (1982) の尺度はあるスカラーによって因果方向の強度を測定しようとする試みであった。その延長線上には因果方向の尺度を周

波数ごとにいくつかの成分に分解する方法も考えられる。周波数領域における因果方向の分解は工学の分野において別の目的の下にいくつか考えられているが、ここでは特に赤池・中川 (1972) によるRPC (Relative Power Contribution, 相対パワー寄与度) を取り上げて論じることとする。その一つの理由は近年大久保 (1984) をはじめしばしば日本のマクロ経済分析に関する実証研究にその方法が用いられているからである。しかしながら、しばしばその理論的前提条件を吟味することなしに結論が導かれることがあり、ここではその点について特に留意する。もしも後に述べる条件が近似的にさえも満たされなければ、実証的結論は大きな問題を孕むこととなるところは言うまでもないであろう。ところで、このような周波数領域におけるグレンジャー因果方向を分解する方法の利点はいくつか考え得るが、重要なものとしては次の三点であろう。

(i) 周波数領域によって経済学でいう“短期”的影響と“長期”的影響をある意味で分離できること。

(ii) 数値としての因果方向の尺度を周波数別に分解することによって尺度の解釈が容易になること。

(iii) 二変量モデルによる分析から多変量モデルによる分析への拡張が直ちに可能であること。

ところで、Geweke (1982) はここで解説するRPC分解とは異なった周波数領域に於ける因果方向の分解方法を提案している。その方法は本質的にRPC分解と同等である。他方、その方法は二次元以上に拡張することは困難であろう。さて、ここで我々の出発点はII節における $Z_t = (X_t, Y_t)$ の二次元自己回帰表現 (2.8) である。(2.8) の第二式を書き直すことによって

$$(4.12) \quad [1 - b_{22}(L)]Y_t = b_{21}(L)X_t + u_{2t}$$

となる。ここで両辺に $[1 - b_{22}(L)]^{-1}$ を乗ずると

$$(4.13) \quad Y_t = \sum_{s=1}^{\infty} a_s X_{t-s} + u_{yt}$$

となる。ここで $\{a_s\}$ はLの多項式 $a(L) = [1 - b_{22}(L)]^{-1} b_{21}(L)$ の係数であり、

$$(4.14) \quad u_{yt} = [1 - b_{22}(L)]^{-1} u_{2t}$$

である。同様にして (2.8) の第一式を変形することによって

$$(4.15) \quad X_t = \sum_{s=1}^{\infty} b_s Y_{t-s} + u_{xt}$$

となる。ここで $\{b_s\}$ は L の多項式 $b(L) = [1 - b_{11}(L)]^{-1} b_{22}(L)$ の係数であって、

$$(4.16) \quad u_{xt} = [1 - b_{11}(L)]^{-1} u_{1t}$$

である。ところで注意すべきこととしては (4.14) より

$$(4.17) \quad u_{yt} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{22}^{(s)} u_{yt-s} + u_{2t}$$

となり、 u_{2t} はすべての u_{yt-s} ($s=1, 2, \dots$) と無相関であるから、 u_{yt} は一変量自己回帰過程に従っていることになる。同様にして

$$(4.18) \quad u_{xt} = \sum_{s=1}^{\infty} b_{11}^{(s)} u_{xt-s} + u_{1t}$$

と書けて u_{xt} は一変量自己回帰過程に従っていることになる。さてここで重要な次の仮定をおく。

仮定A: $Z_t = (X_t, Y_t)'$ の二次元自己回帰過程 (2.6) における誤差項 $(u_{1t}, u_{2t})'$ は互いに無相関、すなわち、 $\sigma_{12} = 0$ である。

仮定Aの下では (4.14) と (4.16) より直ちに (4.13) と (4.15) のシステムにおける誤差項 u_{xt} と u_{yt} は互いに無相関になることがわかる。逆に u_{xt} と u_{yt} が無相関ならば X_t と Y_t の自己回帰表現 (2.6) の誤差項はやはり互いに無相関になる。ところでここで仮定Aの下で (4.13) と (4.15) から成るシステムは“赤池のフィード・バック・システム” (Akaike Feedback System, 赤池・中川 (1972)) と呼ばれている。

ここで (2.9) の $B(L)$ の余因子行列 (Cofactor)

$$(4.19) \quad \tilde{B}(L) = \begin{pmatrix} 1-b_{22}(L) & b_{12}(L) \\ b_{21}(L) & 1-b_{11}(L) \end{pmatrix}$$

を考える。この行列を (2.8) の左から乗ざると、

$$(4.20) \quad \det[I - B(L)] \cdot \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} = \tilde{B}(L) \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

となる。行列式 $\det[I - B(L)]$ はスカラー (L の多項式) であるから (4.20) の第一式より

$$(4.21) \quad X_t = \frac{1 - b_{22}(L)}{\det[I - B(L)]} u_{1t} + \frac{b_{12}(L)}{\det[I - B(L)]} u_{2t}$$

$$= \left[\frac{1}{1 - a(L)b(L)} \right] u_{Yt} + \left[\frac{b(L)}{1 - a(L)b(L)} \right] u_{Xt}$$

という X_t の分解を導くことができる。ここで (4.21) における第二行への変形には (4.14) と (4.16) を用いた。全く同様にして Y_t の分解を (4.20) より導けば、

$$(4.22) \quad Y_t = \frac{b_{21}(L)}{\det[I - B(L)]} u_{1t} + \frac{1 - b_{11}(L)}{\det[I - B(L)]} u_{2t}$$

$$= \left[\frac{a(L)}{1 - a(L)b(L)} \right] u_{Xt} + \left[\frac{1}{1 - a(L)b(L)} \right] u_{Yt}$$

となる。

次に $Z_t = (X_t, Y_t)$ の二次元自己回帰表現を用いて確率過程 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_X(\lambda)$, $f_Y(\lambda)$ の分解公式を得ることができる。ただしここで簡単に $\{X_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_X(\lambda)$ を定義すると、 t 次の自己共分散関数 (t -th Autocovariance function) を $r(t)$ とすると $f_X(\lambda)$ とは

$$(4.23) \quad f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} r(j) e^{-i\lambda j}$$

となる $r(t)$ のフーリエ変換である。ここで $f_X(\lambda)$ は周波数 λ の関数であって、 $\lambda \in [0, \pi]$, $i = -1$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ の整数である。【注4-1】

定理 4.2 :

仮定 A の下で $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数 $f_X(\lambda)$, $f_Y(\lambda)$ は次のように分解される。

$$(4.24) \quad \begin{cases} f_Y(\lambda) = f_{Y|X}(\lambda) + f_{Y|Y}(\lambda), \\ f_X(\lambda) = f_{X|X}(\lambda) + f_{X|Y}(\lambda). \end{cases}$$

ただし、

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{Y|X}(\lambda) &= \frac{\sigma_{11} \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{21}(j) e^{-i\lambda j} \right|^2}{2\pi \left| \left| I - \sum_{j=1}^{\infty} B(j) e^{-i\lambda j} \right|^2 \right|^2}, \\ f_{Y|Y}(\lambda) &= \frac{\sigma_{22} \left| \left| 1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{11}(j) e^{-i\lambda j} \right|^2 \right|^2}{2\pi \left| \left| I - \sum_{j=1}^{\infty} B(j) e^{-i\lambda j} \right|^2 \right|^2}, \end{aligned} \right.$$

$$f_{X|X}(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} b_{12}^{(j)} e^{-i\lambda j}}{2\pi \left\| I - \sum_{j=1}^{\infty} B^{(j)} e^{-i\lambda j} \right\|^2},$$

$$f_{X|Y}(\lambda) = \frac{\sigma_{22} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_{12}^{(j)} e^{-i\lambda j} \right\|^2}{2\pi \left\| I - \sum_{j=1}^{\infty} B^{(j)} e^{-i\lambda j} \right\|^2}$$

である。ここで任意の行列 C に対して $\|C\|^2 = (\det C)^2$ とする。

証明： (4. 21) より右辺を展開することによって

$$(4.26) \quad X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j u_{1t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j u_{2t-j}$$

$$= c(L)u_{1t} + d(L)u_{2t}$$

となる。ここで $c_0 = d_0 = 1$ であって、 $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < +\infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} d_j^2 < +\infty$,

かつ、 $c(L) = [1 - b_{22}(L)]/\det[1 - B(L)]$, $d(L) = b_{12}(L)/\det[1 - B(L)]$

である。任意の t と s に関して u_{1t} と u_{2s} は仮定 A の下で無相関であるから X_t の s 一次の自己共分散関数は (4. 26) より

$$(4.27) \quad \gamma(s) = E(X_t X_{t-s})$$

$$= \sigma_{11} \sum_{j=0}^{\infty} c_{j+s} c_j + \sigma_{22} \sum_{j=0}^{\infty} d_{j+s} d_j$$

となる。(4. 27) のフーリエ変換を (4. 23) に従って計算すると X_t のスペクトル密度関数は

$$(4.28) \quad f_X(\lambda) = \frac{\sigma_{11}}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+s} + \frac{\sigma_{22}}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} \sum_{j=0}^{\infty} d_j d_{j+s}$$

$$= \frac{\sigma_{11}}{2\pi} c(e^{-i\lambda}) \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{i\lambda j} + \frac{\sigma_{22}}{2\pi} d(e^{-i\lambda}) \sum_{j=0}^{\infty} d_j e^{i\lambda j}$$

$$= \frac{\sigma_{11}}{2\pi} c(e^{-i\lambda}) c(e^{i\lambda}) + \frac{\sigma_{22}}{2\pi} d(e^{-i\lambda}) d(e^{i\lambda})$$

となる。ここで $e^{-i\lambda s} = e^{-i\lambda(j+s)+i\lambda j}$ なる関係を用いた。そこで $c(L)$ と

$d(L)$ をもとの $B(L)$ の要素で書き直すことにすると (4. 24) の第二式を得る。

同様にして (4. 22) より Y のスペクトル密度関数の分解である (4. 24) の第一式を得る。||

このようにして $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のスペクトル密度関数の分解を得たわけであるが、この分解に基づいて周波数 λ における寄与率を定義する。

定義 4. 2 :

(i) 周波数 $\lambda \in [0, \pi]$ における $\{X_t\}$ のスペクトル密度に対する $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のイノベーションのRPC (相対的パワー寄与度, Relative Power Contribution) は

$$(4.29) \quad \text{RPC}_{X|X}(\lambda) = \frac{f_{X|X}(\lambda)}{f_X(\lambda)}, \quad \text{RPC}_{X|Y}(\lambda) = \frac{f_{X|Y}(\lambda)}{f_X(\lambda)}$$

とする。同様にして $\{Y_t\}$ のスペクトル密度に対する $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のイノベーションのRPC (λ) は

$$(4.30) \quad \text{RPC}_{Y|X}(\lambda) = \frac{f_{Y|X}(\lambda)}{f_Y(\lambda)}, \quad \text{RPC}_{Y|Y}(\lambda) = \frac{f_{Y|Y}(\lambda)}{f_Y(\lambda)}$$

とする。

仮定Aの下では $\{X_t\}$ のスペクトル密度 $f_X(\lambda)$ は X_t 自身のイノベーション (あるいは予測誤差) u_{Xt} と Y_t のイノベーション u_{Yt} の寄与の部分 $f_{XIX}(\lambda)$, $f_{XIY}(\lambda)$ の加法和として分解が可能である。従って, $f_{XIX}(\lambda)$ と $f_{XIY}(\lambda)$ の全体に対する比によって各々の寄与の度合を測ることは一応合理的であるといえよう。 $\{Y_t\}$ のスペクトル密度についても全く同じように u_{1t} と u_{2t} の全体への寄与の度合によって寄与率を定めている。定義4.2より相対寄与率に関しては

$$(4.31) \quad \begin{cases} \text{RPC}_{X|X}(\lambda) + \text{RPC}_{X|Y}(\lambda) = 1 \\ \text{RPC}_{Y|X}(\lambda) + \text{RPC}_{Y|Y}(\lambda) = 1 \end{cases}$$

が成立する。RPC (λ) は基準化されている為とその解釈が容易であるが, ここではグレンジャーの非因果性の概念との関連でその意味を考えてみよう。

(i) 仮定Aの下でもし Y_t はグレンジャーの意味で X_t の原因でない, $Y_t \not\rightarrow^G X_t$ としよう。この時, 定理4.2より, $b_{12}(L) = 0$ となるので (4.25) より, $f_{XIY}(\lambda) = 0$, すなわち, $f_X(\lambda) = f_{XIX}(\lambda)$ となる。従って, $\text{RPC}_{XIX}(\lambda) = 1$ かつ, $\text{RPC}_{XIY}(\lambda) = 0$ となってあらゆる周波数 λ において X_t のスペクトル密度関数は X_t のイノベーションによってのみ説明され, Y_t の固有のイノベーションの X_t への寄与はゼロとなる。

(ii) 今度は逆に X_t はグレンジャーの意味で Y_t の原因ではない, $X_t \not\rightarrow^G Y_t$ としよう。すると同様な推論によって, $b_{21}(L) = 0$ より, $\text{RPC}_{YIX}(\lambda) = 0$ かつ, $\text{RPC}_{YIY}(\lambda) = 1$ となる。従って, あらゆる周波数 λ において Y_t のスペクトル密度は Y_t の固有のイノベーションによってのみ説明されることになる。

(iii) もし, $Y_t \rightarrow^G X_t$ かつ, $X_t \rightarrow^G Y_t$ とすると, 仮定Aの下では, $b_{12}(L) = b_{21}(L)$

$= 0$ となって、 $\{X_t\}$ と $\{Y_t\}$ のスペクトル密度はそれぞれ自身のイノベーションによって説明しつくされ、すべての周波数において、 $RPC_{XX}(\lambda) = 1$ 、 $RPC_{YY}(\lambda) = 0$ となる。このことは二つの確率過程が独立であることを意味している。

3. RPCによる分析例

RPC (相対パワー寄与度) 分解を用いた分析例として再び日本におけるマクロ分析の対象としてしばしば議論されている実質国内総生産 (RGDP) と貨幣ストック

(M2 + CD) の関係を調べてみよう。我々は第 I 節においてシステムの変数へ影響を与えているにもかかわらず分析から除かれている重要な変数が存在する場合には、その変数がグレンジャー因果の方向の分析結果に決定的なバイアスを与える可能性があることに言及した。実際 Sims (1972) は II. 3 節で解説した Sims テストを用いて戦後の米国の名目所得と貨幣ストックのデータから名目所得へのグレンジャーの意味での一方的因果方向を検出したが、後に Sims (1980) は金利を所得と貨幣に加えた三変数による多次元自己回帰モデルを用いた分析を行い、彼自身の発見した貨幣から所得への一方的因果方向について否定的結論を導いている。Sims のこの互いに予備する結果は名目所得と貨幣の二変数の分析において第三の変数である金利を通じた効果を無視した為に生じたことによると考えられる。経済学的には前者はマクロ経済学における伝統的マネタリストの考え方に整合的であり、他方後者は伝統的なケインズ経済学の考え方に整合的である。

我々はここで実質国内総生産 (RGDP) と貨幣ストック (M2 + CD) の他にマクロ分析の中心変数である一般物価水準、金利、及び政府財政支出を用いて分析を進める。ここで物価水準としては国民経済計算における GDP デフレーター (P と略する)、金利としては短期金利として代表的な無条件コール・レート (Callrate、日本銀行の経済統計年報) の三ヶ月平均、政府財政支出として国民経済計算における公的支出 (GE と略する) を採用した。すべてのデータは四半期原系列より計算された 1969Q1 ~ 1982Q1 間の対前年同期比の系列を用いることにした。ここで以下では RGDP、P、M2 + CD、コール・レート、GE は対前年同期比のデータを指すものとする。全データは表 4.1 に与えてあるが、その動きをプロットしたものが図 4.1 ~ 図 4.5 である。季節調整済のデータを用いなかった理由は既に III 章で簡単にふれた。前年同期比の変換はトレンドと季節変動を近似的ではあるが同時に除去できる簡単な方法である。一般にある変数 X について

$$\begin{aligned} \log X_t - \log X_{t-4} &= \log\left(1 + \frac{X_t - X_{t-4}}{X_{t-4}}\right) \\ &\cong \frac{X_t - X_{t-4}}{X_{t-4}} \end{aligned}$$

となることから、この方法は原系列の対数変換値から階差を取ることによってトレンドを近似的に除こうとしていると解釈される。前年同期比のデータの分析における一つの利点としては系列の数値についての解釈が容易であることが挙げられる。これに対して第三章で用いた回帰によるトレンドと季節性を除く方法は結果の系列値についてそれ程明瞭な解釈が可能でない場合も多い。

〈図4. 1～図4. 5を参照〉

この期間におけるこれらの時系列データについての詳細な事実については既によく知られていることでもあり、省略する。ただ、RGDPとM2+CDの系列については70年代を通じてなお若干の負のトレンド、あるいは成長率の低下が観察される。そこでこれらの二系列についての標本自己相関関数(ACF)と標本偏自己相関関数(PACF)を図4. 6～図4. 9に示した。さらにRGDPとM2+CDの標本相互相関関数(CCF)を図4. 10に示した。RGDPとM2+CDの標本ACFはともにラグの大きさとともにその絶対値はある程度減少していることがわかる。

〈図4. 6～図4. 10を参照〉

ここでRGDPとM2+CDの関係の解釈に他の変数の及ぼす影響を調べる為に次のような変数を組合せたモデルを考えた。

[ケースI] RGDP, M2+CDの二変数モデル。

[ケースII] RGDP, M2+CD, Pの三変数モデル。

[ケースIII] RGDP, M2+CD, P, コール・レートの四変数モデル。

[ケースIV] RGDP, M2+CD, P, コール・レート, GEの五変数モデル。

これらの各ケースについて多変量自己回帰モデルをデータにフィットさせ、未知パラメータを推定した。最大ラグの選択方法は赤池の最小FPE基準と最小AIC基準を用いた。

ここでk変数ベクトル Z_t のp次自己回帰表現

$$(4.32) \quad Z_t = \sum_{s=1}^p B^{(s)} Z_{t-s} + U_t \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

に対して係数の最小自乗推定値 $\hat{B}^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, p$)より残差を

$$(4.33) \quad \hat{U}_t = z_t - \sum_{s=1}^p \hat{B}(s) z_{t-s}$$

とする。この時、FPE (Final Prediction Error) の推定値は

$$(4.34) \quad \text{FPEC}(P) = \frac{(1 + \frac{kp+1}{n})^k}{(1 + \frac{kp+1}{n})^k} \det(\hat{\Sigma})$$

によって定義される。ただし $\hat{\Sigma}$ は (4.32) における誤差分散の推定値であって

$$(4.35) \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{t=p+1}^n \hat{U}_t \hat{U}_t'$$

で与えられる。(Z₁, …, Z_p) を条件とした時の最大尤度は

$$(4.36) \quad L(z_n, z_{n-1}, \dots, z_{p+1} | z_p, \dots, z_1)$$

$$\propto - \left(\frac{n-p}{2} \right) \log \det(\hat{\Sigma})$$

となることが知られているので【注4—2】 係数パラメターの数が pk 個であることを用いてAICは(3.2)より定まることになる。

さて表4.2～表4.9はケースI～ケースIVのそれぞれについて次数の選択とパラメターの推定結果を示している。【注4—3】 FPECとAICは(4.34)と(3.2)より計算され、RFPECはFPECを基準化した数値である。いずれの場合も最小FPEC, 最小AICは $p=2$ において実現されている。データは対前年同期比であるから、 $4 \times 2 = 8$ 四半期の自己相関構造を持つので、第Ⅲ章において推定された自己相関構造とはそれ程違いはないといえよう。表4.2～表4.9においてSD(II, JJ)は誤差の分散共分散推定値(4.35)であり、Normalized SD(II, JJ)は(4.35)から計算された相関係数行列である。相関係数の値は最大で0.25程度であり、多くの場合0.1よりも小さい。従ってRPC分解はある程度正当化されることがうかがわれる。以下ではRPC分解の結果について若干のコメントを加える。

(i) [ケースI]

〈図4.11～図4.12を参照〉

図4.11～図4.12は二変数RGDPとM2+CDによるRPC分解の結果である。M2+CD→RGDPへの因果方向は高周波数領域ではほとんど検出されないが、低周波数領域では多少検出されている。この現象は第Ⅲ章の結果とも整合的であるが、マネタリスト的な解釈は困難である。と言うのは低周波領域は周期に解釈し直すと長期の問題であって、データは長期的に貨幣から実質所得への因果方向を示しているからである。他方、

RGDP→M2+CDへの影響は全周波領域に及んでいる。特に低周波領域に大きなピークがあり、大きく長期的影響が現れているが、これは通常の貨幣需要関数による解釈が可能であろう。

(ii) [ケースⅡ]

〈図4.13～図4.15を参照〉

図4.13～図4.15は三変数RGDP, M2+CD, PによるRPC分解を示している。物価水準Pは全周波数領域にわたってGDPとM2+CDへ影響を及ぼしている。他方、M2+CD→Pへの影響は低周波数領域、すなわち長期において顕著に現れている。RGDP→Pの影響は周波数 $\lambda \cong \pi/5$ 、すなわち周期 $t \cong 2\pi / (\pi/5) = 10$ 四半期にピークがあり全周波数にわりって影響がみられる。M2+CD→RGDPへの方向は低周波数領域ばかりでなく、ケースⅠでは現れなかった高周波領域(短期)にも若干影響が検出される。これはPの存在を考慮した為にP→M2+CDを通じた効果が現れた結果であろう。

(iii) [ケースⅢ]

〈図4.16～図4.19を参照〉

図4.16～図4.19はRGDP, M2+CD, P, コール・レートの四変数によるRPC分解である。全体を通じてコール・レートの影響が著しい。例えばRGDPとコール・レートは互いに全周波数で影響を及ぼし合っている。ケースⅡで極めて大きく現れていたP→RGDPの方向性は多少小さくなり、その相当部分がコール・レート→RGDPの効果として分離されている。M2+CD→RGDPへの効果はケースⅡと同様に全周波数領域で検出される。M2+CDを説明する要因としては特に低周波数領域においてRGDPとコール・レートが重要である。Pとコール・レートは互いに全周波数において影響を及ぼし合っている。これは金利として、実質金利ではなく名目金利を用いている為に影響が大きく現れた為かもしれない。所謂フィッシャー効果が検出されている、と解釈されるが、断定するには物価変動の期待に関してより理論的な考察が必要であろう。

(iv) [ケースⅣ]

〈図4.20～図4.24を参照〉

図4.20～図4.24はRGDP, M2+CD, P, コール・レート, GEの五変数によるRPC分解である。新しく付け加わったGEを除いた分解の成分はほぼケースⅡ及びケースⅢと同じである。特にRGDPとM2+CDの関係はケースⅡ～ケースⅣを通じて

因果方向が全周波数領域にわたって存在している。従って、グレンジャー非因果性の仮説、 $RGDP \rightarrow M2 + CD$, あるいは、 $M2 + CD \rightarrow RGDP$ が棄却された第Ⅲ章の結果はここでも再び確認される。ケースⅣによって興味をひく関係は政府支出（GE）から他の変数への影響が強く現れていることであろう。その影響はほぼ周波数 $\lambda = 2\pi$, 周期 $2\pi / 2\pi = 10$ 四半期（2.5年）にピークがあり、低周波数領域に強く現れていることが特徴である。さらにGEへの因果方向としてはほとんどをGE自身からの影響によって説明されている。言い換えるならば、この期間において、財政支出（GE）は他の変数に比べて自生的（Autonomous）な傾向が観察される。

Ⅴ. グレンジャー非因果性と外生性

1. 簡単な例

経済時系列の分析に際してグレンジャー非因果性のテストはしばしばある変数が計量モデルにおいて外生変数（Exogenous Variables）であるかどうかという変数の外生性（Exogeneity）のテストとして用いられることがある。例えば Sargent (1976) はその古典派的モデルにおいて貨幣ストック変数の外生性をグレンジャー検定によって検討している。また Geweke (1978) は Sims 検定を同時方程式による計量モデルにおける変数の外生性のテストとして解釈している。ここでは以下でグレンジャー非因果性と計量経済学における外生性の二つの概念の関係を調べてみることにする。まず、簡単な二変数より成る同時方程式モデルを例にとってみよう。その経済学的意味づけとしては標準的教科書に述べられている需要と供給によって価格（ X_t とする）と数量（ Y_t とする）が決定されるある製品の市場を考えてみれば良いであろう。

例 5. 1 :

時点 t においてこの市場によって決る内生変数（Endogenous Variables）, X_t と Y_t のシステムは次のような動学的構造をしているとする。

$$(5.1) \quad \begin{cases} X_t = \beta_{12}Y_t + \gamma_{11}X_{t-1} + \gamma_{12}Y_{t-1} + u_{1t} \\ Y_t = \beta_{21}X_t + \gamma_{21}X_{t-1} + \gamma_{22}Y_{t-1} + u_{2t} \end{cases}$$

ただし誤差項（ u_{1t} , u_{2t} ）は、 $E(u_{it}) = 0$, $Cov(u_{it}, u_{jt}) = \sigma_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) となる時間について独立な正規確率変数とする。この時、構造形方程式（Structural

Form Equation) (5. 1) を内生変数 (X_t , Y_t) について解くと、誘導形方程式 (Reduced Form Equation)

$$(5.2) \quad \begin{cases} X_t = \pi_{11}X_{t-1} + \pi_{12}Y_{t-1} + v_{1t} \\ Y_t = \pi_{21}X_{t-1} + \pi_{22}Y_{t-1} + v_{2t} \end{cases}$$

を得る。ここで (5. 1) と (5. 2) の関係より、 $1 - \beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ を仮定すると誘導形の係数パラメーター (π_{ij}) ($i, j = 1, 2$) と誤差項 v_{it} ($i = 1, 2$) について

$$(5.3) \quad \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \beta_{12}\beta_{21}} \begin{pmatrix} \gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} + \beta_{12}\gamma_{22} \\ \gamma_{21} + \beta_{21}\gamma_{11} & \gamma_{22} + \beta_{21}\gamma_{12} \end{pmatrix},$$

$$(5.4) \quad \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \beta_{12}\beta_{21}} \begin{pmatrix} u_{1t} + \beta_{12}u_{2t} \\ u_{2t} + \beta_{21}u_{1t} \end{pmatrix}$$

が成立し、かつ、 $v_t = (v_{1t} \ v_{2t})$ の共分散行列は

$$(5.5) \quad \Omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\sigma_{ij}) \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

である。

さて、このシステムにおいて仮説 Y_t が X_t のグレンジャーの意味で原因ではない $Y_t \xrightarrow{G} X$ とは定理 2. 1 より仮説

$$H^{(1)} : \pi_{12} = \frac{\gamma_{12} + \beta_{12}\gamma_{22}}{1 - \beta_{12}\beta_{21}} = 0$$

と同等になる。仮説 $H^{(1)}$ はこのシステムの誘導形についての制約条件であり、誘導形 (5. 2) は識別可能 (Identifiable) 【注 5—1】 であるから $H^{(1)}$ はデータから直接検定可能 (Testable) な仮説である。これに対してしばしば構造型 (5. 1) についての仮説、例えば、

$$H^{(2)} : \beta_{12} = 0,$$

あるいは、より強い条件として

$$H^{(3)} : \beta_{12} = \gamma_{12} = 0$$

などがグレンジャーの非因果性 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ に同等な仮説として言及することがある。しかしながら、一般には $H^{(3)} \rightarrow H^{(1)}$ は成立するがその逆は成立しないことは明らかであろう。さらに構造型システム (5. 1) は無制約の下では識別可能ではないので一般に $H^{(2)}$ と $H^{(3)}$ はこのままでは検定可能な仮説ではない。例えば構造型システム (5. 1) に任意の正則な 2×2 行列 $S = (s_{ij})$ を左から乗ずると変換されたモデルにおいては制

約条件 $H^{(2)}$ や $H^{(3)}$ はもはや別の意味を持つてくることになる。

ところで最小自乗による推定が方程式の含む未知係数パラメータについて一致性

(Consistency) を与える場合、説明変数を被説明変数に対して“回帰外生性”

(Regression exogeneity) とする定義が提案されている。【注5-2】 そこで以上の

例についてこの回帰外生性の条件をみる為に、まずグレンジャー-非因果性の仮説 $H^{(1)}$:

$Y_t \not\rightarrow X_t$ の下で (5.2) の第二式において Y_t の条件付期待値をとると

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad E[Y_t | X_t, X_{t-1}, Y_{t-1}] & \\
 &= \pi_{21} X_{t-1} + \pi_{22} Y_{t-1} + \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} v_{1t} \\
 &= \frac{\gamma_{21} + \beta_{21} \gamma_{11}}{1 - \beta_{12} \beta_{21}} X_{t-1} + \frac{\gamma_{22} + \beta_{21} \gamma_{12}}{1 - \beta_{12} \beta_{21}} Y_{t-1} + \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} \left[X_t - \frac{\gamma_{11} + \beta_{12} \gamma_{21}}{1 - \beta_{12} \beta_{21}} X_{t-1} \right] \\
 &= \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} X_t + \frac{1}{1 - \beta_{12} \beta_{21}} \left[\gamma_{21} + \beta_{21} \gamma_{11} - \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} (\gamma_{11} + \beta_{12} \gamma_{21}) \right] X_{t-1} \\
 &\quad + \frac{\gamma_{22} + \beta_{21} \gamma_{12}}{1 - \beta_{12} \beta_{21}} Y_{t-1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $H^{(1)}$ の下で $v_{1t} = X_t - \pi_{11} X_{t-1}$ となることを用いている。(5.6)

よりグレンジャーの非因果性の仮説は構造方程式の最小自乗推定が一致性を与えること

(すなわち回帰外生性) の必要条件でも十分条件でもないことがわかる。

次にグレンジャー-非因果性 $H^{(1)}$ よりも強い仮説 $H^{(3)}$ が成立したとしよう。そうすると、

Y_t の条件付期待値は (5.6) より

$$\begin{aligned}
 (5.7) \quad E[Y_t | X_t, X_{t-1}, Y_{t-1}] &= \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} X_t + \left(\gamma_{21} + \beta_{21} \gamma_{11} - \frac{\omega_{12}}{\omega_{11}} \gamma_{11} \right) X_{t-1} \\
 &\quad + \left(\gamma_{22} + \beta_{21} \gamma_{12} \right) Y_{t-1}
 \end{aligned}$$

となる。従って再び仮説 $H^{(3)}$ も構造方程式の最小自乗推定が一致性を与える必要条件でも

十分条件でもない。さてここで (5.5) より、 $\omega_{11} / \omega_{12} = \beta_{21} + \sigma_{12} / \sigma_{11}$ である

ことに注意しよう。このことより (5.7) が

$$(5.8) \quad E[Y_t | X_t, X_{t-1}, Y_{t-1}] = \beta_{21} X_t + \gamma_{21} X_{t-1} + \gamma_{22} Y_{t-1}$$

となる一つの十分条件は

$$H^{(4)} : H^{(3)} \text{ かつ } \sigma_{12} = 0$$

で与えられることがわかる。しかしながらやはりこの条件も $H^{(2)}$ や $H^{(3)}$ と同様にデータのみから検証可能ではない。

2. グレンジャー非因果性と計量的外生性

一般に同時方程式体系によって表現された計量モデルを

$$(5.9) \quad B^{(0)} Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} B^{(i)} Z_{t-i} + U_t$$

とする。ここで $Z_t = (X_t, Y_t)'$ は時点 t においてモデルに現れるすべての変数のベクトルであり、通常の意味での外生変数 (Exogenous Variables) とシステム内で決定される内生変数 (Endogenous Variables) を含んでいる。ここでは簡単化の為に X_t がスカラー、 Y_t が 2×1 のベクトル変数となる場合を考えておくことにする。もちろん、一般に X_t と Y_t がそれぞれ p_1, p_2 個の変数より成るベクトルであっても本節での議論は同一である。 $B^{(k)} = (B_{ij}^{(k)})$ ($k=0, 1, \dots$) は 3×3 の構造係数パラメターの列、 $U_t = (u_{1t}, u_{2t})$ は 3×1 の攪乱項ベクトルであって、ここでは時間 t について独立で平均 0、共分散行列 $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ の正規分布に従っていることとしよう。ここで Z_t の要素 X_t と Y_t に対応して $B^{(k)}, U_t, \Sigma$ の行列とベクトルは分割されている。この構造方程式の体系 (5.9) は Koopmans (1950) によって導入されたもので“完備線型同時方程式体系” (Complete Linear Simultaneous Equations System) と呼ばれている。例 5.1 は (5.9) において X_t と Y_t はともにスカラーであって

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{pmatrix}, B^{(1)} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, B^{(i)} = 0 \quad (i \geq 2)$$

の場合に対応している。

さて $B^{(0)}$ が正則である仮定の下で (5.9) を変数 Z_t について解けば

$$(5.10) \quad Z_t = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi^{(k)} Z_{t-k} + v_t$$

となって Z_t の多変量自己回帰表現 (Multivariate AR-Representation) を得る。ここで係数パラメターの列 $\Pi^{(i)}$ は Π . 1 節で述べた定常性の条件を満たしていると仮定し、

$$(5.11) \quad \Pi^{(k)} = (\Pi_{ij}^{(k)}) = B^{(0)-1} B^{(k)} \quad (k=1, 2, \dots)$$

と分割され、誤差項 $v_t = (v_{1t}, v_{2t})$ は平均 0、共分散行列は

$$(5.12) \quad \Omega = (\Omega_{ij}) = B^{(0)-1} \Sigma B^{(0)-1}$$

で与えられることが (5.9) と (5.10) の関係よりわかる。次に方程式体系 (5.

9) より u_{2t} に対応する構造方程式 (Structural Equation) をとり出すと

$$(5.13) \quad B_{22}^{(0)} Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} B_{22}^{(k)} Y_{t-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(k)} X_{t-k} + u_{2t}$$

と書き直すことができる。ここで

$$\Gamma^{(0)} = -B_{21}^{(0)}, \quad \Gamma^{(k)} = B_{21}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

とおいた。通常の計量経済学では (5. 13) は“動学的同時方程式モデル”

(Dynamic Simultaneous Equations System) と呼ばれ、変数 Y_t (2×1) のベクトルを内生変数 (Endogenous Variables), 変数 X_t (ここではスカラー) を外生変数 (Exogenous Variables) という。もし

$$B_{22}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \Gamma^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

ならば (5. 13) はラグ付き内生変数とラグ付き外生変数を含まない“静学的同時方程式体系” (Static Simultaneous Equations System) であって、これは計量経済学の標準的教科書において詳細に述べられているシステムである。ここで注意すべき点としては通常、同時方程式体系 (5. 13) の議論においては内生変数 Y_t と外生変数 X_t の区別は先験的 (a priori) に与えられていることであろう。さらに (5. 10) において内生変数 Y_t に対応した部分を取り出すと、

$$(5.14) \quad Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{22}^{(k)} Y_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{21}^{(k)} X_{t-k} + v_{2t}$$

となる。構造形 (Structural Form) (5. 13) に対応する誘導形 (Reduced Form) 方程式体系を得る。

ここで同時方程式体系 (5. 13) において変数 X_{t-k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) について次のような概念が導入される。

定義 5. 1 (先決性) :

構造方程式体系 (5. 13) において、すべての非負の整数 $k > 0$ に対して X_t が U_{t+k} と無相関 ($X_t \perp U_{t+k}$ と記す) ならば変数 X_t は“先決性” (Predeterminedness) を持つという。

定義 5. 2 (狭義外生性) :

構造方程式体系 (5. 13) において、すべての整数 k について X_t が U_{t+k} と無相関、すなわち、 $X_t \perp U_{t+k}$ ならば X は“狭義外生性” (Strict Exogeneity) を持つという。

システム (5. 1 3) において先決性あるいは狭義外生性を持つ変数のことを先決変数 (Predetermined Variable), あるいは外生変数 (Exogenous Variable) と呼ぶことにする。先決変数は時点 t においてその期の攪乱項 U_t とは無相関であるが, 過去の攪乱項 U_{t-k} ($k = 1, 2, \dots$) との無相関性までは要求していない。従って, ラグ付き内生変数は先決性の条件を満足している。ところが狭義外生性はある変数がシステムのあらゆる過去の攪乱項との無相関性であることを要求している。ラグ付き変数は過去のシステムのイノベーションによって決定される変数であるから狭義外生性を持たない。この狭義外生性 (Strict Exogeneity) は伝統的に計量経済学において単に“外生性”

(Exogeneity) と呼ばれてきた。もしある変数がシステムにおいて狭義外生性を持つならばその変数は推定, その他の統計的推測の問題に関しては固定した変数 (あるいは確率変数の実現値) とみなしてよい。ここでは他の意味で外生性と呼ばれる概念との混乱を避ける為に“狭義”と名付けることにした。実際, これまでに起こった“外生性”についての混乱はしばしばいくつかの異なった外生性の概念に同一の単語を用いたことによるとみなせよう。

ところで, ここで導入した先決性と (狭義) 外生性はグレンジャーの非因果性とどのように関連するであろうか。次に与える Engle-Hendry-Richard (1981) による命題はこの問題に対する一つの解答を与えている。

定理 5. 1 :

同時方程式体系 (5. 1 3) において変数 X_t が狭義外生性を持つための必要十分条件は

- (i) Y_t はグレンジャーの意味で X_t の原因ではない, すなわち, $Y_t \not\rightarrow X_t$.
- (ii) (5. 1 3) において X_t は先決性を持っている, すなわちすべての正整数 $k > 0$ に対して $X_t \perp\!\!\!\perp u_{t+k}$. で与えられる。

証明: (i) 誘導形パラメター $\Pi^{(k)}$ より, $Q^{(0)} = I$,

$$(5.15) \quad Q^{(k)} = \sum_{j=1}^k \Pi^{(j)} Q^{(k-j)}$$

によって系列 $Q^{(k)} = (Q_{ij}^{(k)})$ を構成する。この時,

$$(5.16) \quad \begin{aligned} Z_{t+k} &= v_{t+k} + \Pi^{(1)} Z_{t+k-1} + \sum_{j=2}^{\infty} \Pi^{(j)} Z_{t+k-j} \\ &= v_{t+k} + \Pi^{(1)} \left[v_{t+k-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \Pi^{(j)} Z_{t+k-1-j} \right] + \sum_{j=2}^{\infty} \Pi^{(j)} Z_{t+k-j} \\ &= Q^{(0)} v_{t+k} + Q^{(1)} v_{t+k-1} + \sum_{j=2}^{\infty} \left[\Pi^{(j)} + Q^{(1)} \Pi^{(j-1)} \right] Z_{t+k-j} \end{aligned}$$

となることを繰り返すことによって、

$$(5.17) \quad z_{t+k} = \sum_{j=0}^i Q^{(j)} v_{t+k-j} + \sum_{j=i+1}^{\infty} \tilde{Q}^{(j)} z_{t+k-j}$$

となる。ここで $\tilde{Q}^{(j)}$ は (5.17) によって $\Pi^{(j)}$, $Q^{(j)}$ の系列より定められる。と

ころで (5.17) の右辺第二項は、 $i \geq k$ なら v_t と無相関となるので、

$$(5.18) \quad \text{cov}(z_{t+k}, v_t) = Q^{(k)} \Omega$$

となる。

(ii) 定理 2.1 より、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ の必要十分条件は $\Pi^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$) である。(5.15) よりこの条件は $Q_{12}^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$) と同値となる。

システム (5.9) において U_{t+k} ($k \geq 1$) は将来のイノベーションであるから Z_t と常に無相関である。従って、 X_t の先決性は $U_t = B^{(0)} v_t$ より

$$(5.19) \quad \begin{aligned} 0 &= \text{cov}(u_{2t}, X_t) \\ &= (0, I) B^{(0)} \text{cov}(v_t, z_t) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, I) B^{(0)} \Omega \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と同値になる。同様にして X_t が狭義外生的であることは任意の非負の整数 $k > 0$ に対して

$$(5.20) \quad \begin{aligned} 0 &= \text{cov}(u_{2t}, X_{t+k}) \\ &= (0, I) B^{(0)} \text{cov}(v_t, z_{t+k}) \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, I) B^{(0)} \Omega Q^{(k)} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と同値である。

(iii) [十分性] $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ より $Q_{12}^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$)、 X_t の先決性より (5.19) が成り立つので (5.20) を得る。

(iv) [必要性] (5.20) において $k=0$ とおけば (5.19)、すなわち X_t の先決性を得る。次に (5.20) において $k=1$ とおくと、先決性より、 $(I \ 0) B^{(0)} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{21} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix} = 0$ となることを用いると、

$$(5.21) \quad \begin{aligned} 0 &= (0 \ I) B^{(0)} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_{11}^{(1)'} & \Pi_{21}^{(1)'} \\ \Pi_{12}^{(1)'} & \Pi_{22}^{(1)'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (0, B_{21}^{(0)} \Omega_{12} + B_{22}^{(0)} \Omega_{22}) \begin{pmatrix} \Pi_{11}^{(1)'} \\ \Pi_{12}^{(1)'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることから、 $\Pi_{12}^{(1)} = 0$ となる。同様にして $\Pi_{12}^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$) が導かれることにより、 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ となる。||

この命題から直ちにわかることは、変数 Y_t から変数 X_t へのグレンジャー非因果性の

仮説 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ は X_t の狭義外生性の一つの必要条件であるが十分条件ではないことである。すなわちグレンジャー非因果性の仮説 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ が棄却される時には変数 X_t の(狭義)外生性の仮説も棄却されるが、他方、非因果性の仮説 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ が棄却できない場合にはなお変数 X_t の外生性の仮説が棄却される可能性がある。このことから、しばしば主張されるようなグレンジャー非因果性と計量モデルにおける外生性は同等ではないし、外生性のテストとしてのグレンジャーの非因果性のテストを解釈する場合には注意を要することが結論される。構造方程式から成る計量モデルにおける先決性と外生性についての十分条件としては次のようなものが知られている。

定理 5. 2 :

同時方程式体系 (5. 13) において $B_{22}^{(0)}$ は正則とする。

(i) この時もし

$$(5. 22) \quad B_{12}^{(0)} = 0 \quad \text{かつ} \quad \Sigma_{12} = 0$$

が成立すれば変数 X_t は先決性を持つ。

(ii) もし

$$(5. 23) \quad B_{12}^{(k)} = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad \text{かつ} \quad \Sigma_{12} = 0$$

が成立すれば変数 X_t は狭義外生性を持つ。

証明: (5. 9) と (5. 10) より

$$(5.24) \quad \Sigma = B^{(0)} \Omega B^{(0)'}$$

であるから条件 (5. 22) より,

$$(5.25) \quad \begin{aligned} B^{(0)} \Omega &= B^{(0)'}{}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}^{(0)'}{}^{-1} & -B_{11}^{(0)'}{}^{-1} B_{21}^{(0)'} B_{22}^{(0)'}{}^{-1} \\ 0 & B_{22}^{(0)'}{}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{11} B_{11}^{(0)'}{}^{-1} & -\Sigma_{11} B_{11}^{(0)'}{}^{-1} B_{21}^{(0)'} B_{22}^{(0)'}{}^{-1} \\ 0 & \Sigma_{22} B_{22}^{(0)'}{}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。(5. 25) より直ちに X_t の先決性の条件 (5. 19) が導かれる。さらに

(5. 23) ($k=1, 2, \dots$) が成立すると (5. 9) と (5. 11) よりグレンジャーの非因果性 $Y_t \xrightarrow{G} X_t$ の条件 $\Pi_{12}^{(k)} = 0$ ($k=1, 2, \dots$) を得るので定理 2.2 より X_t は外生性を持つ。||

以上の二つの条件の中で条件 (5. 2 3) は Koopmans (1950) が与えた外生性についての一つの十分条件である。そこでしばしばこの条件は変数 X についての“クープマンズ外生性”の定義として言及される。Koopmans はこの条件の下で完備同時方程式体系 (5. 9) より通常の同時方程式体系 (5. 1 3) を導いている。さて制約条件 (5. 2 2) や (5. 2 3) は無条件では検定可能ではない。と言うのは (5. 9) のシステムにおいて制約条件を全く考慮しなければ構造パラメーターは識別可能ではない。任意の正則な非対角行列 S を (5. 9) の左から乗ずると観測上同等 (Observationally Equivalent) なモデルが導かれるが、新しいモデルにおいては条件 (5. 2 2) や (5. 2 3) は全く別の意味を持ち、変換に対して不変ではない。もちろん、何らかの先験的 (a priori) な制約によってモデルが識別されるならば上で述べられた条件は検定可能である。実際、この場合についての外生性のテストはこれまで既にいくつか提案されている。

【IV. 5 節への付論：弱外生性と強外生性】

この節では同時方程式体系によって表されている計量モデルにおける概念としての外生性を狭義外生性 (Strict Exogeneity) として議論してきた。“外生性”の概念を拡張し、より一般的な統計的モデルにおいて定義する試みがなされている。(Engle-Hendry-Richard (1983)) そこで簡単にその定義と狭義外生性との関連を述べておくことにする。さて $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ はある統計的モデルにおける未知パラメーターであって、我々は特にその中で λ_1 にのみ関心があるとしよう。以下では $D(Z_t | Z_{t-1})$ を Z_{t-1} を条件とした時の変数 $Z_t = (X_t, Y_t)'$ の密度関数とし、さらに初期条件 $Z_0 = z_0$ を固定して分布を考えることにする。

定義 5. 3 (弱外生性) :

変数 X_t が λ_1 に関して弱外生性 (Weak Exogeneity) を持つとは Z_{t-1}, \dots, Z_0 を条件とした時の Z_t の条件付き密度関数 $D(Z_t | Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda)$ が

$$(5.26) \quad D(Z_t | Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda) \\ = D(Y_t | X_t, Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda_1) D(X_t | Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda_2)$$

と分解できることである。

定義 5. 4 (グレンジャー非因果性) :

Y_t が X_t のグレンジャーの意味で原因でない、 $Y_t \not\overset{G}{\rightarrow} X_t$ とは X_t の Z_{t-1}, \dots, Z_0 を条件とした時の密度関数が

$$(5.27) \quad D(X_t | Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda) = D(X_t | X_{t-1}, \dots, X_1, Z_0; \lambda)$$

となることである。

定義 5. 5 (強外生性) :

変数 X_t がパラメーター λ_1 に関して強外生性 (Strong Exogeneity) を持つとは、(i) X_t が λ_1 に関して弱外生性を持ち、(ii) $Y_t \not\rightarrow^G X_t$ となることである。

ここで定義 5. 4 はこれまでのグレンジャーの非因果性の概念を確率分布を用いて解釈したものである。さらにパラメーター λ の尤度関数を $L(\lambda; Z_T, \dots, Z_0)$ としよう。定義 5. 3 より X_t が弱外生的である時この尤度関数は

$$(5.28) \quad L(\lambda; Z_T, Z_{T-1}, \dots, Z_0) \\ = \prod_t (Y_t | X_t; Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda_1) \prod_t (X_t | Z_{t-1}, \dots, Z_0; \lambda_2)$$

と分解される。これより λ_1 についての情報は右辺第一項に縮約されていることになる。ただし X_t は Y_t の過去に依存している (右辺第二項) ので X_t を固定したものとはみなすことはできない。そこでさらに $Y_t \not\rightarrow^G X_t$ とする、すなわち X_t が λ_1 に関して強外生的であるとする。この時尤度関数はさらに (5. 27) を用いて

$$(5.29) \quad L(\lambda; Z_T, Z_{T-1}, \dots, Z_0) \\ = \prod_t (Y_t | X_t, Z_{t-1}, \dots, Z_0, \lambda_1) \prod_t (X_t | X_{t-1}, \dots, X_1, Z_0, \lambda_2)$$

と分解される。ここで初期条件 $Z_0 = z_0$ を固定しているので右辺第二項は現在及び過去の X_t の情報のみに依存している。従って、関心のある未知パラメーター λ_1 に関する統計的推測はすべて右辺第一項に基づいて行うことになる。つまり変数 X_t は λ_1 に関する限り固定された定数、あるいは実現値と考えても統計的推測には全く影響しないことになっている。

ところで、以上のような弱外生性と強外生性を同時方程式体系の計量モデルへ適用させてみよう。未知パラメーター λ_1 は我々の関心のある構造方程式 (5. 13) のみに表れるパラメーターであり λ_2 をそれ以外の方程式に表れるパラメーターとしよう。さらに λ_1 と λ_2 というパラメーターの間にまたがった制約条件 (Cross Equations Restriction) は存在しないとしよう。 (“Variation Free” の仮定と呼ばれている。) この時、変数 X_t の弱外生性の次のようないくつかの十分条件が知られている。

- (i) 先決性かつ $B_{12}^{(0)} = 0$,
- (ii) $A_{12}^{(0)} = 0$ かつ $\Sigma_{12} = 0$,
- (iii) 先決性かつ他の構造方程式がちょうど識別可能 (Just Identifiable) 。

さらにこれらの条件の中でいずれかが成立すれば変数 X_t の強外生性は狭義外生性を意味することは定理5.1より容易に推察するところであろう。

注

- 【注1—1】 確率論の言葉を用いると確率変数 X ($s = t - 1, t - 2, \dots$) によって生成される最小の σ -field である。
- 【注2—1】 Woldの分解定理と呼ばれるものである。
- 【注2—2】 スペクトル分布について若干の正則条件を仮定する。詳しくは Whittle (1963) を参照のこと。
- 【注2—3】 ここでは仮定されたモデルを“正しく”推定しなければならない。もしモデルを誤って推定すると(例えば次数 p を誤ること)当然、推定された予測分散に影響が及ぶ。詳しくは Kunitomo-Yamamoto (1984) を参照されたい。
- 【注2—4】 Whittle (1963) を参照のこと。
- 【注2—5】 とりあえず、例としては Kunitomo-Morimune-Tsukuda (1983) を挙げることができる。
- 【注2—6】 ここでは初期条件を固定したものと解釈している。
- 【注3—1】 もちろんIV. 3節のように各変数について個別にAICを計算するのではなく、同時に次数を決める方法も用いることができる。
- 【注4—1】 詳しくは Geweke (1982) を参照のこと。
- 【注4—2】 無条件の尤度関数は(4.36)に変換のヤコビヤンから行列式を乗ずることになる。
- 【注4—3】 この節での計算は総て統計数理研究所の赤池氏の開発したTIMSAC74-78のソース・プログラムにもとずいて行われた。
- 【注5—1】 識別可能性 (Identifiability) についての議論は通常の計量経済学 (Econometrics) のテキストを参照されたい。
- 【注5—2】 Hatanaka (1982) による。

引用文献

- 赤池弘次-中川東一郎 (1972) , 「ダイナミック・システムの統計的解析と制御」, サイエンス社.
- Amemiya, T. (1973) , "Generalized Least Squares With an Estimated Autocovariance Matrix. " Econometrica, Vol.41, No.4, pp.723-732.
- Chamberlin, G. (1982) , "The General Equivalence of Granger and Sims Causality, " Econometrica, Vol.50, pp.569-581.
- Engle, R. F., D. F. Hendry, and J. F. Richard (1981) , "Exogeneity, Causality and Structural Invariance in Econometric Modelling. " Discussion Paper 81-1, Department of Economics, University of California , San Diego.
- Engle, R. F., D. F. Hendry, and J. F. Richard (1983) , "Exogeneity, " Econometrica, Vol.51, No.2, pp.277-304.
- Geweke, J. (1978) , "Testing the Exogeneity Specification in the Complete Dynamic Simultaneous Equation Model, " Journal of Econometrics , Vol.7, pp.163-185.
- Geweke, J. (1982) ; "Measurement of Linear Dependence and Feedback Between Multiple Time Series, " Journal of the American Statistical Association, Vol.77, pp.304-324.
- Geweke, J., R. Meese, and W. Dent (1983) , "Comparing Alternative Tests of Causality in Temporal Systems : Analytic Results and Experimental Evidence, " Journal of Econometrics , pp. 161-194.
- Granger, C. W. J. (1969) , "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods, " Econometrica, Vol.37, pp.424-438.
- Granger, C. W. J. and M. Hatanaka (1964) , Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton University Press.
- Guilkey, D. and M. Salemi (1983) , "Small Sample Properties of Three Tests for Granger-Causal Ordering in a Bivariate Stochastic System. " The Review of Economics and Statistics, pp.668-680.
- Hannan, E. J. (1963) , "Regression for Time Series, " in Rosenblatt ed., Time Series Analysis , John-Wiley.
- Hatanaka, M. (1982) , "The Causality and Exogeneity Tests in the Simultaneous Equations, " Discussion Paper No.53, Faculty of Economics, Osaka University.
- Haugh, L. D. (1976) , "Checking the Independence of Two Covariance-Stationary Time Series : A Residual Cross Correlation Approach, " Journal of the American Statistical Association , Vol.71, pp.378-385.
- Kama, K. (1982) , "Money, Income and Causality in the Japanese Economy, " Journal of Japan Economic Research, Vol.11, pp. 24-36.
- Komura, C. (1982) , "Money, Income and Causality : The Japanese Case, " The

- Southern Economic Journal , Vol.49, pp. 19-34.
- Koopmans, T. C. (1950) , "When is an Equation System Complete for Statistical Purposes, " in Koopmans ed., Statistical Inference in Dynamic Economic Models, John-Wiley.
- Kunitomo, N. and T. Yamamoto (1984) , "Effects of Misspecification in Autoregressive Time Series Models," Discussion Paper No.83-F-14, Research Institute for the Japanese Economy, Faculty of Economics, University of Tokyo.
- Kunitomo, N., K. Morimune and Y. Tsukuda (1983) , "Asymptotic Expansions of the Distributions of the Test Statistics for Overidentifying Restrictions in a System of Simultaneous Equations," International Economic Review , Vol.24 , No.1, February, pp.199-215.
- McLeod, I. (1979) , "Distribution of the Residual Cross-Correlation in Univariate ARMA Time Series Models," Journal of the American Statistical Association pp.849-855.
- Mehra, Y. P. (1978) , "An Empirical Note on Some Monetarist Propositions," Southern Economic Journal , July, 1978, pp.154-167.
- Newbold, P. (1982) , "Causality Testing in Economics, " in O. D. Anderson ed., Time Series Analysis : Theory and Practice 1 , pp.701-716. North-Holland.
- 大久保隆 (1983) , 「マネーサプライと金融政策」東洋経済新報社.
- Oritani, Y. (1979) , "Money, Income, Government Expenditure and Causality in the Japanese Economy : A Test of Monetarist Hypothese in the Japanese Economy " Bank of Japan, Monetary and Economic Studies Department, Discussion Paper No.1.
- Pierce, D. (1977) , "Relationships -and the Lack Thereof- Between Economic Time Series with Special Reference to Money and Interest Rates," Journal of the American Statistical Association, Vol.72, pp.11 26.
- Pierce, D. and L. Haugh (1977) , "Causality in Temporal Systems," Journal of Econometrics, Vol.5, pp.265-293.
- Price, M. (1979) , "The Characterization of Instantaneous Causality," Journal of Econometrics , Vol.10, pp.253-256.
- Sargent, T. (1976) , "A Classical Macroeconometric Model for the United States, " Journal of Political Economy, Vol.84, No.2, pp.207-237.
- Shibata, R. (1980) , "Asymptotically Efficient Selection of the Order of the Model for Estimating Parameters of a Linear Process, " The Annals of Statistics , Vol.8, No.1, pp.147-164.
- Sims, C. (1972) , "Money, Income, and Causality, " The American Economic Review, Vol.70, pp.540-552.
- Sims, C. (1980) , "Comparison of Interwar and Postwar Business Cycles :

Monetarism Reconsidered, " The American Economic Review, Vol.70, pp250-257.

Whittle, P. (1963) , Prediction and Regulation D.Van Nostrand Company.

Zellner, A. (1979) , "Causality and Econometrics, " Carnegie-Rochester Conference Series 10, North-Holland.

図 3. 1 : 実質国内総生産
[RGDP]

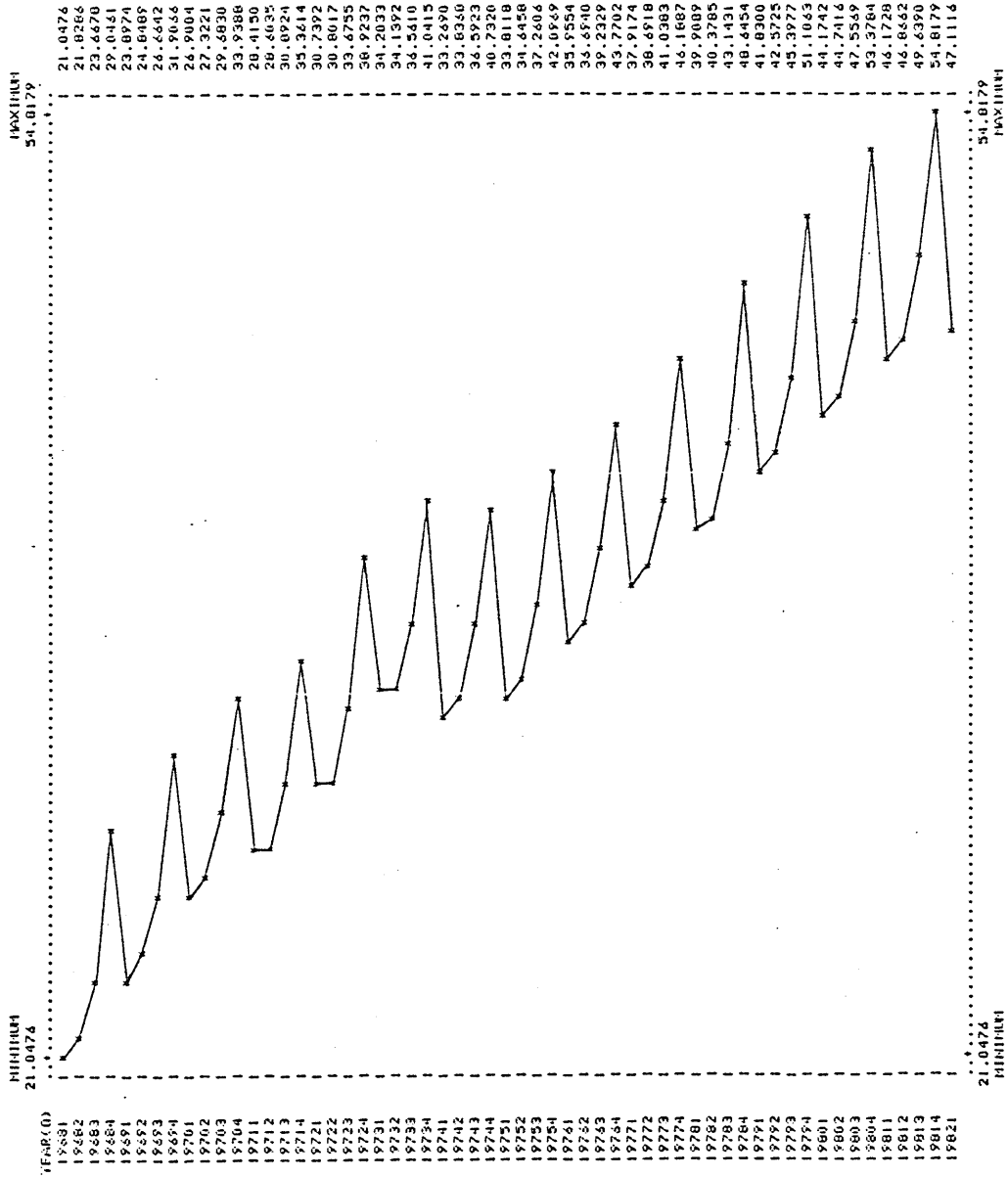


図 3. 2 : 実質国内総生産の対数値

(Log (RGDP))

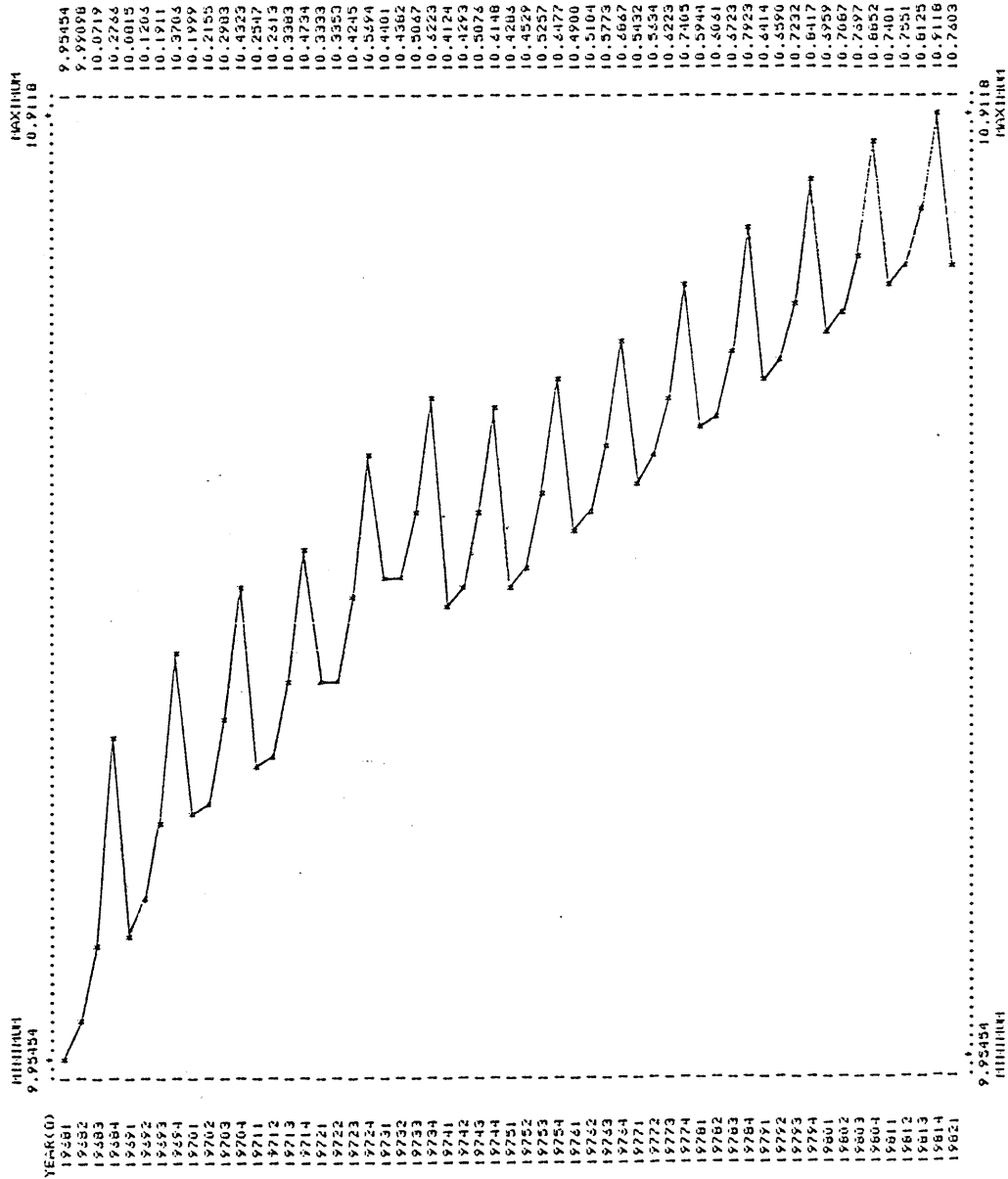


図 3. 3 : M2 + CD の対数値

[Log (M2 + CD)]

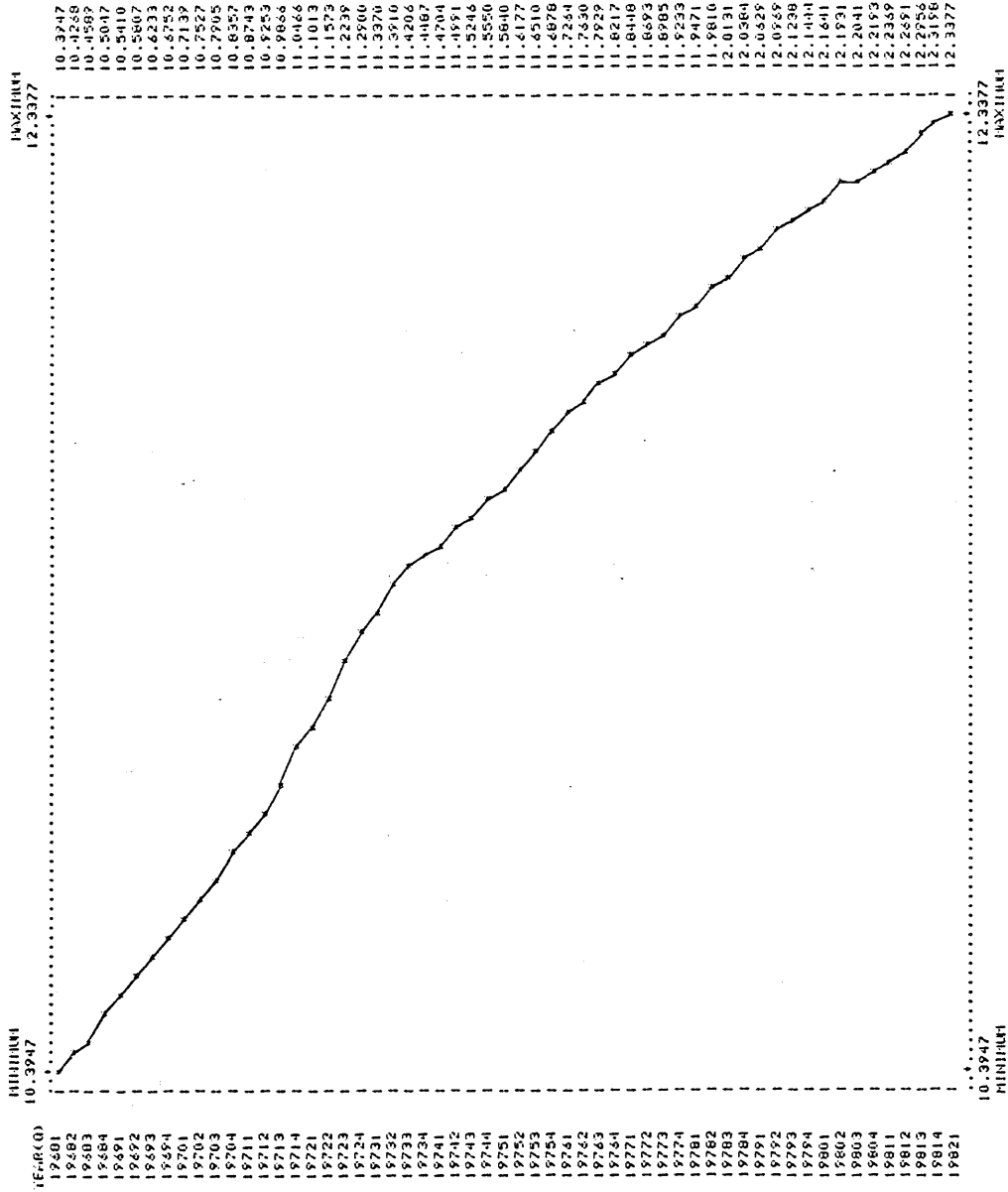


図3. 4: Log (RGDP) の自己相関関数
 (ACF of Log (RGDP))

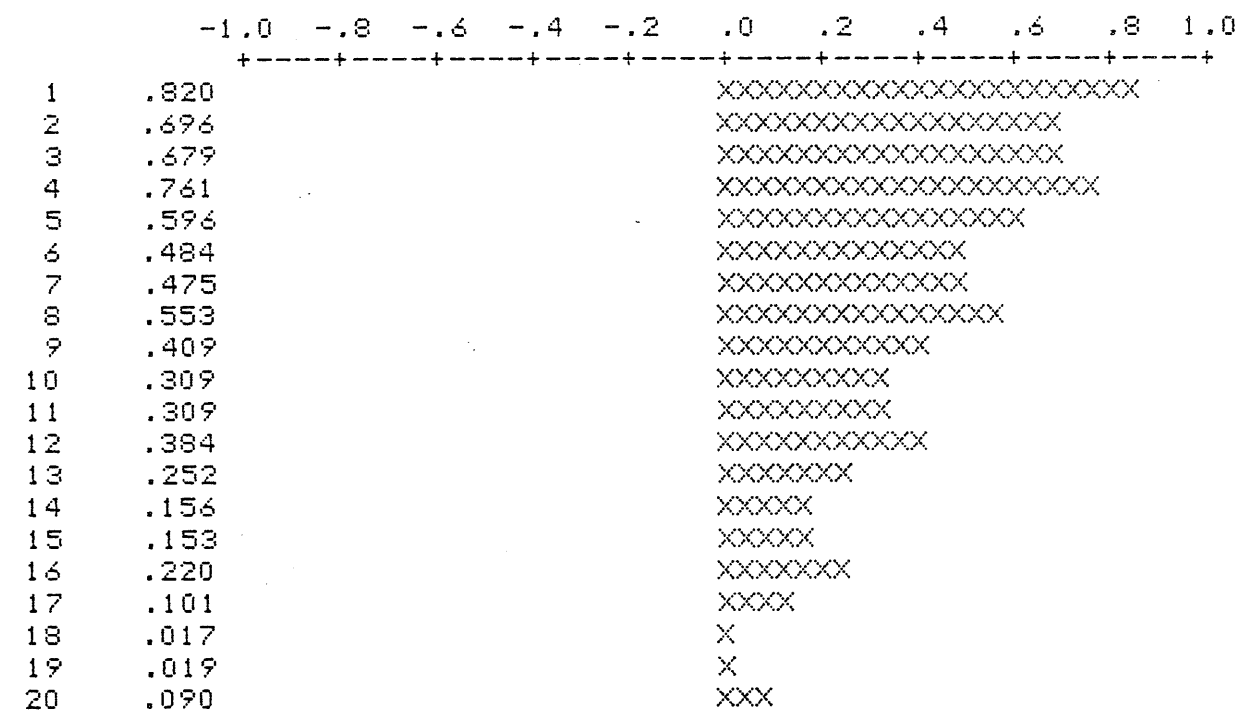


図3. 5 : Log (M2 + CD) の自己相関関数
 (ACF of Log (M2 + CD))

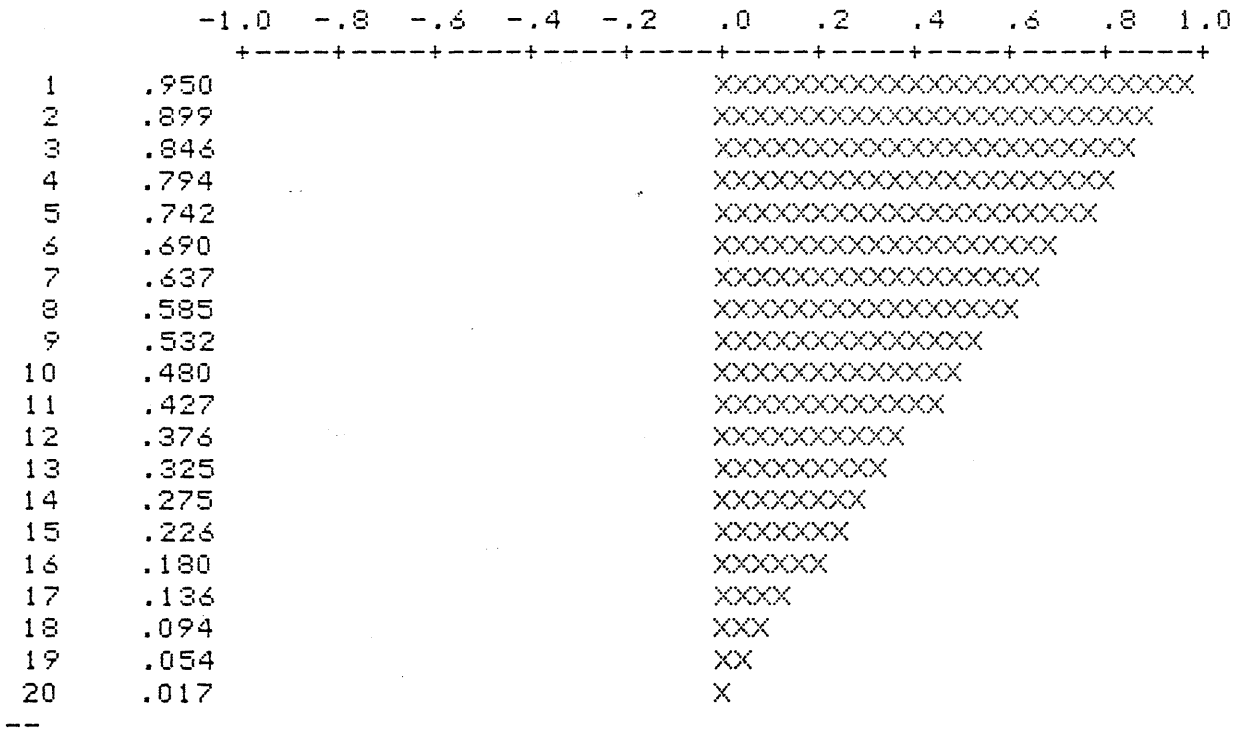


図3.6: Log (GDP) と Log (M2+CD) の相互相関関数
 (CCF of Log (GDP_t) and Log (M2+CD)_t)

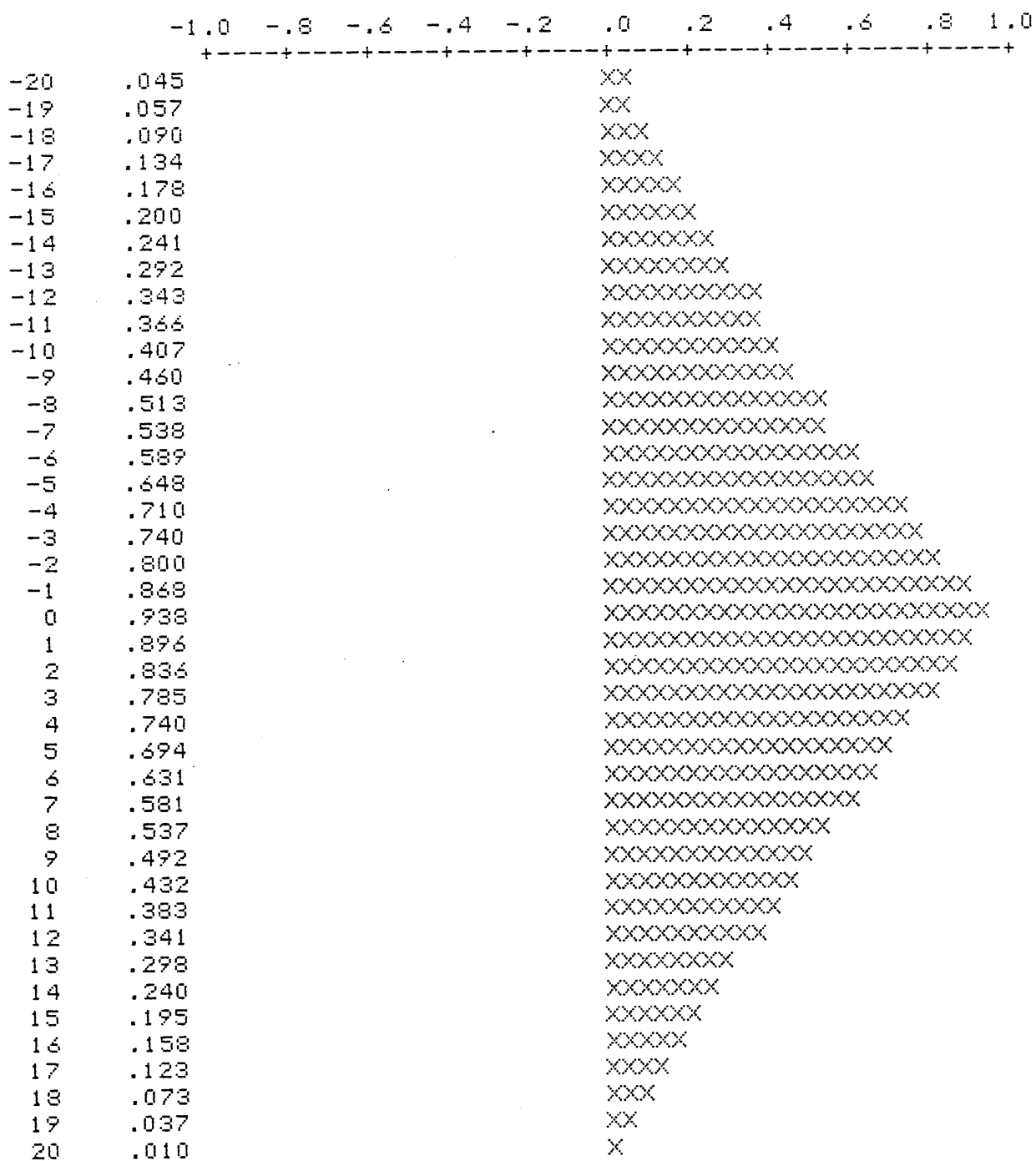


図3.7: Log (RGDP) の最小自乗残差

[Least Squares Residuals of
Log (RGDP)]

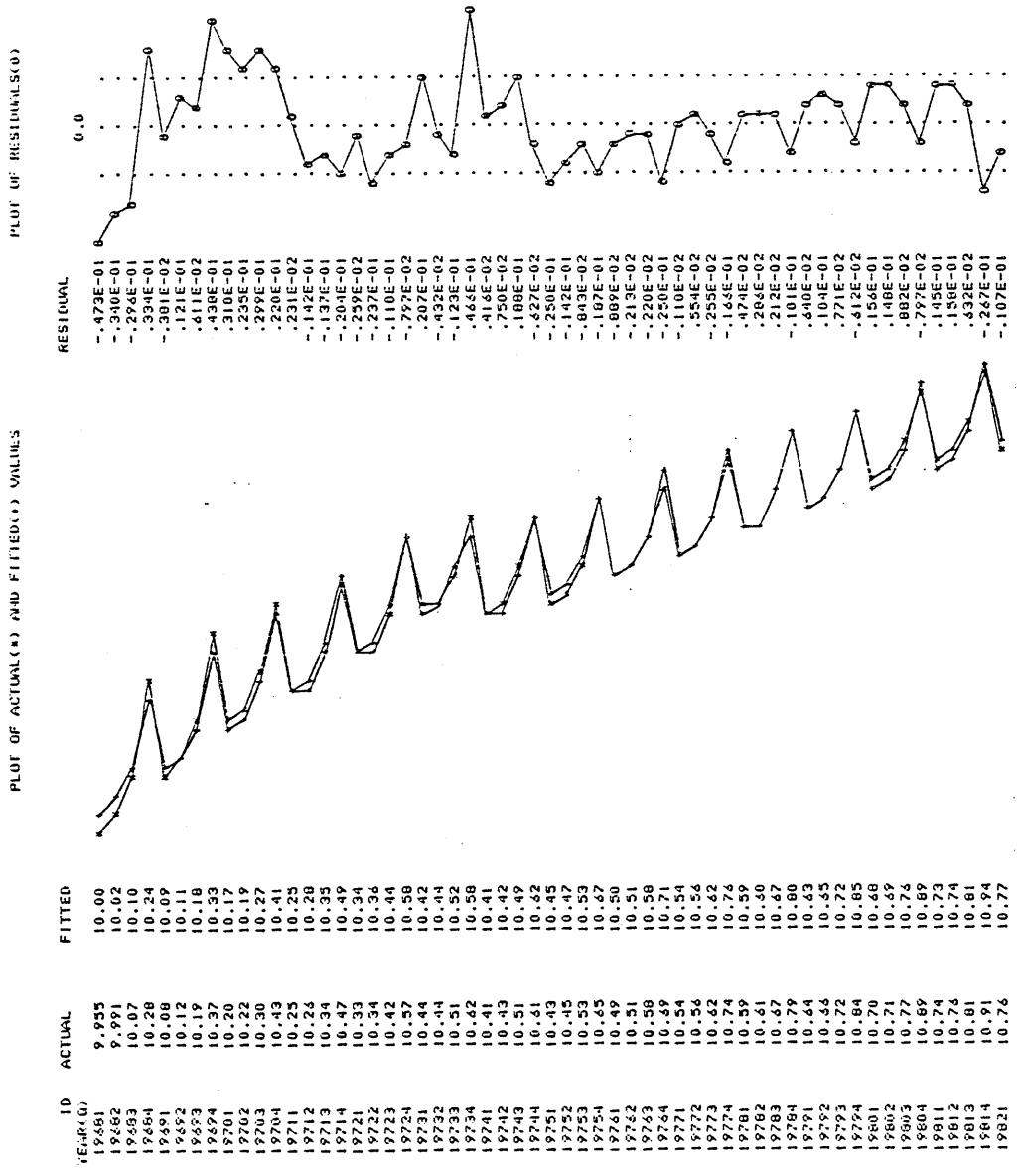


図3.8: $\text{Log}(M2+CD)$ の最小自乗残差
 (Least Squares Residuals of
 $\text{Log}(M2+CD)$)

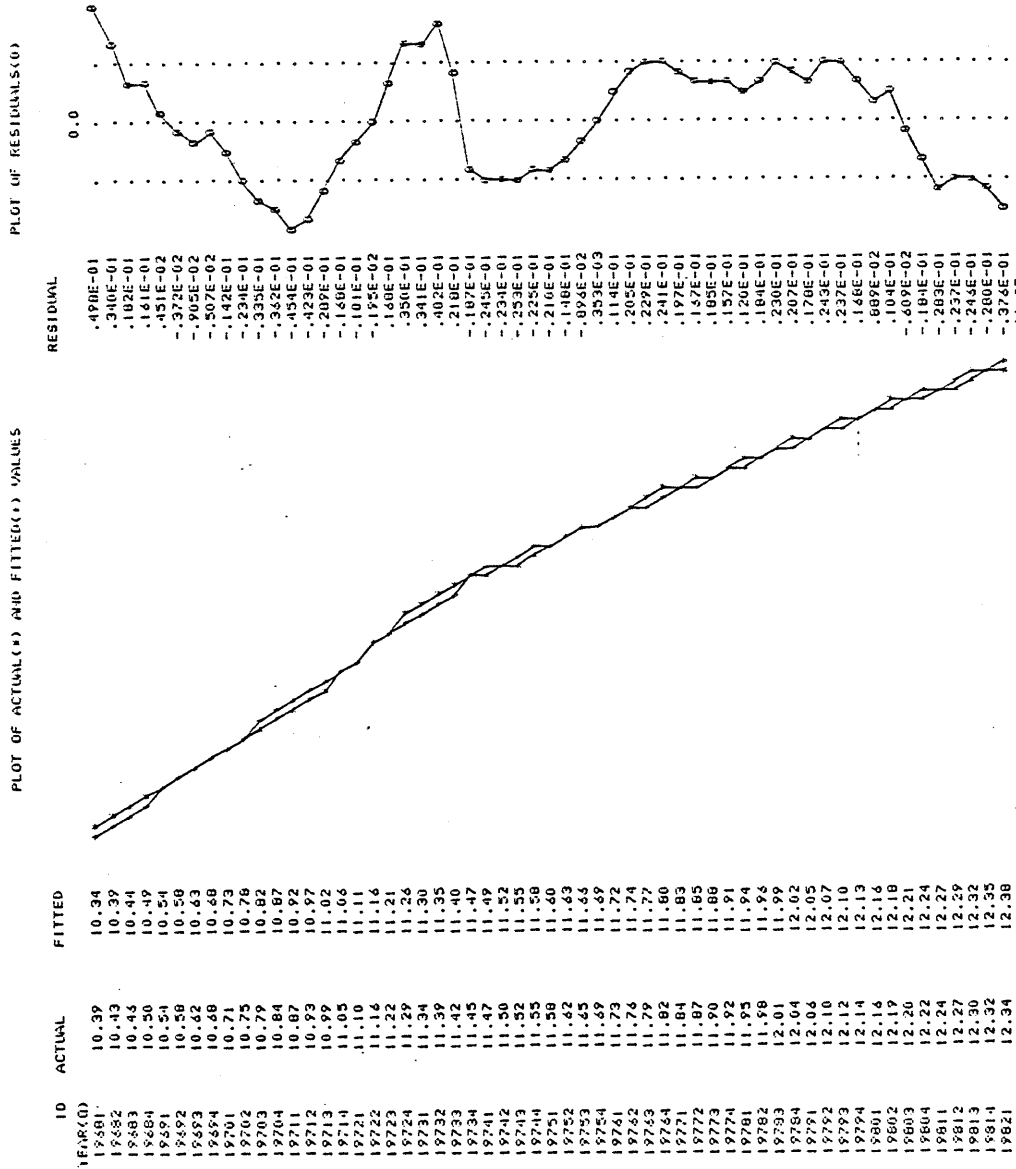


図3. 9: Log (RGDP) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (RGDP) Residuals)

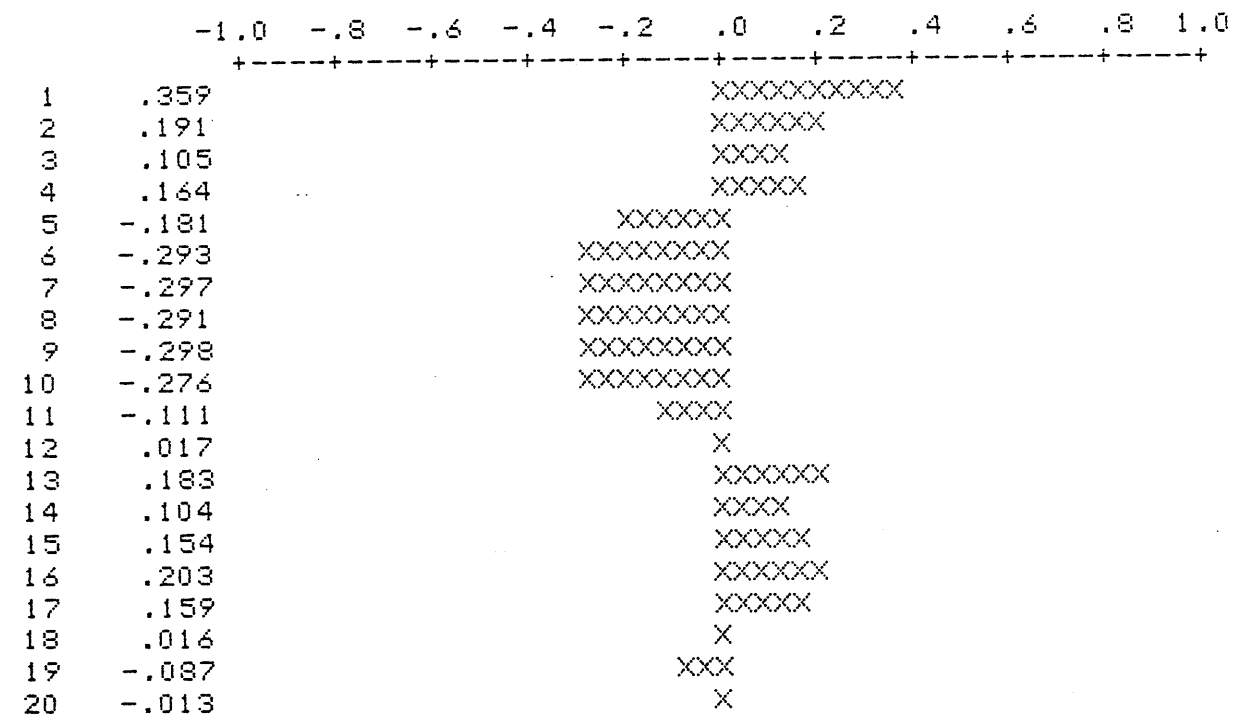


図3.10: Log (RGDP) 残差の偏自己相関関数
 (PACF of Log (RGDP) Residuals)

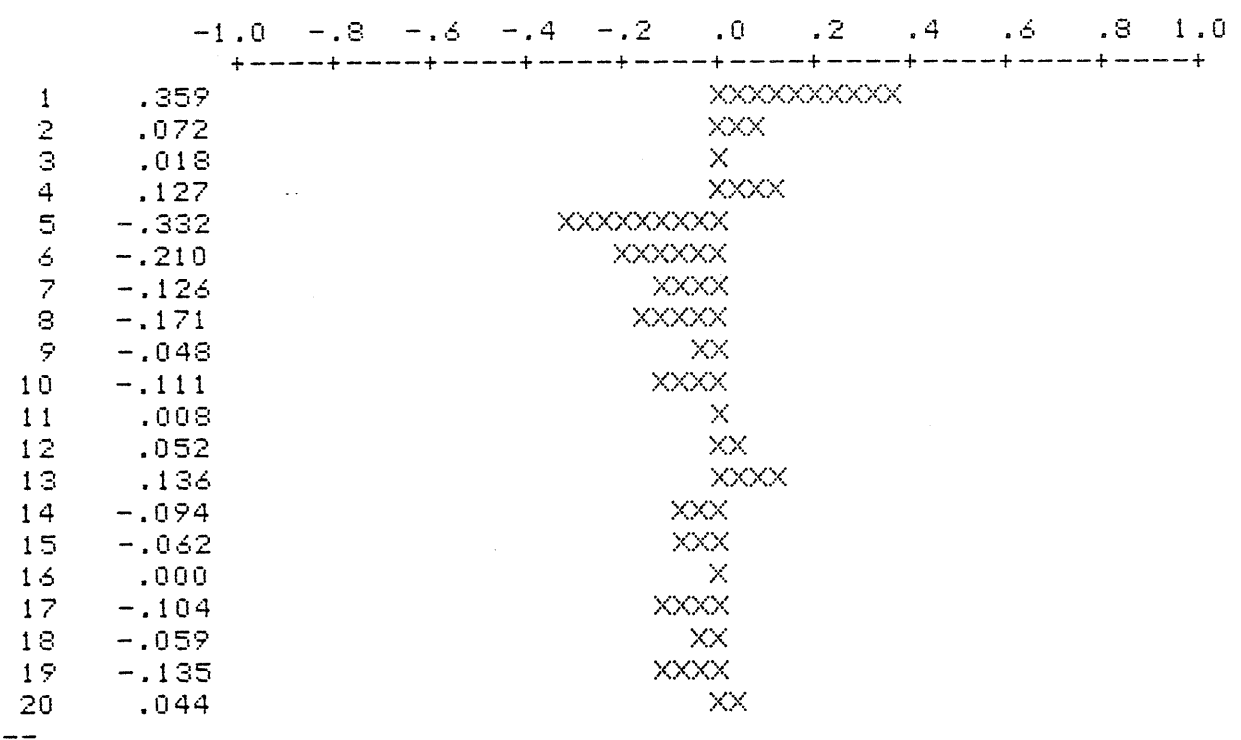


図3. 11: Log (M2+CD) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (M2+CD) Residuals)

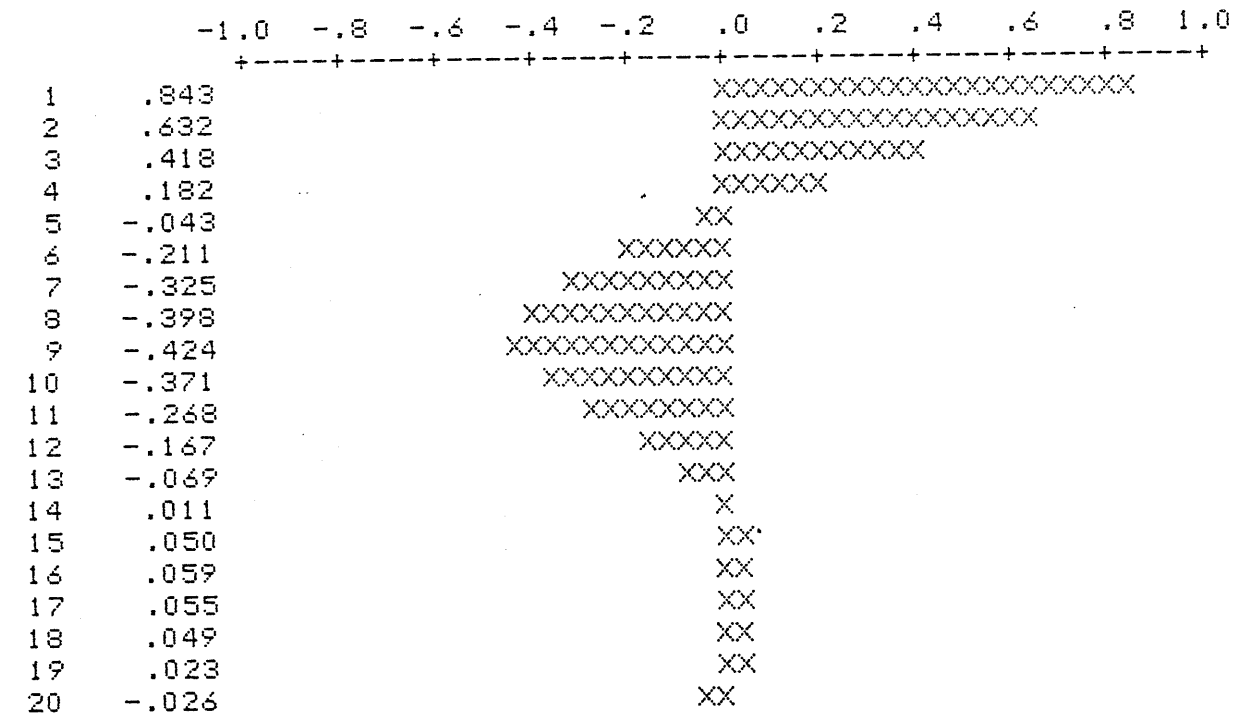


図 3. 12 : Log (M2 + CD) 残差の偏自己相関関数

(PACF of Log (M2 + CD), Residuals)

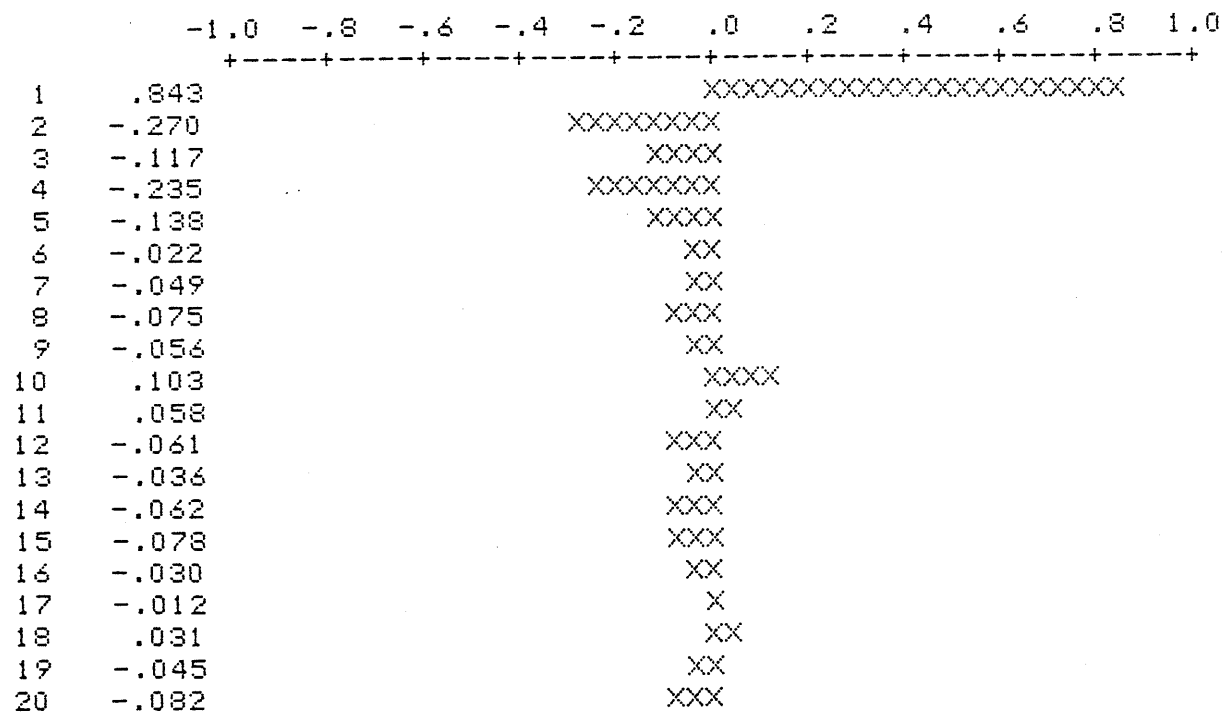


図3. 13: Log (RGDP) 残差とLog (M2+CD) 残差の相互相関関数
 (CCF of Log (RGDP) Residuals and
 Log (M2+CD) Residuals)

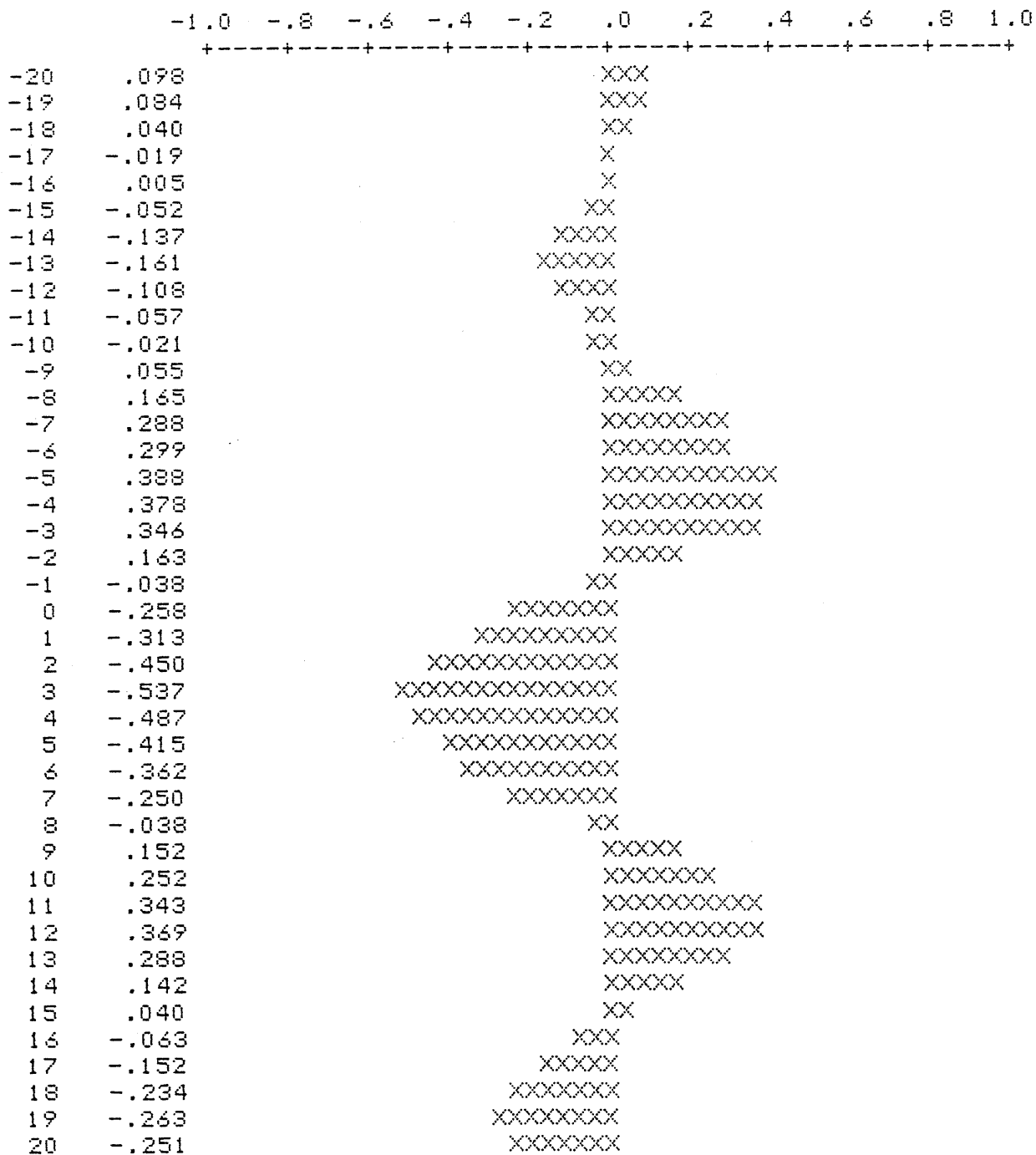


図3. 14: Log (RGDP) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (RGDP) Residuals)

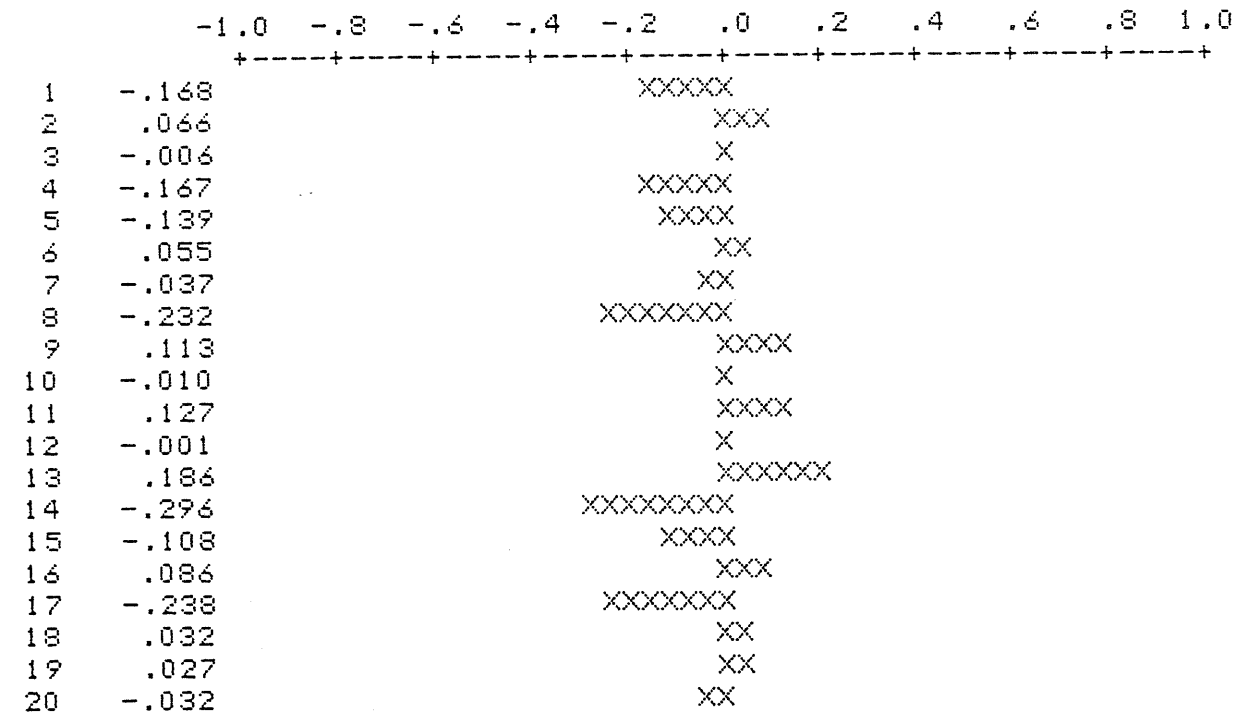


図3.15: Log (M2+CD) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (M2+CD) Residuals)

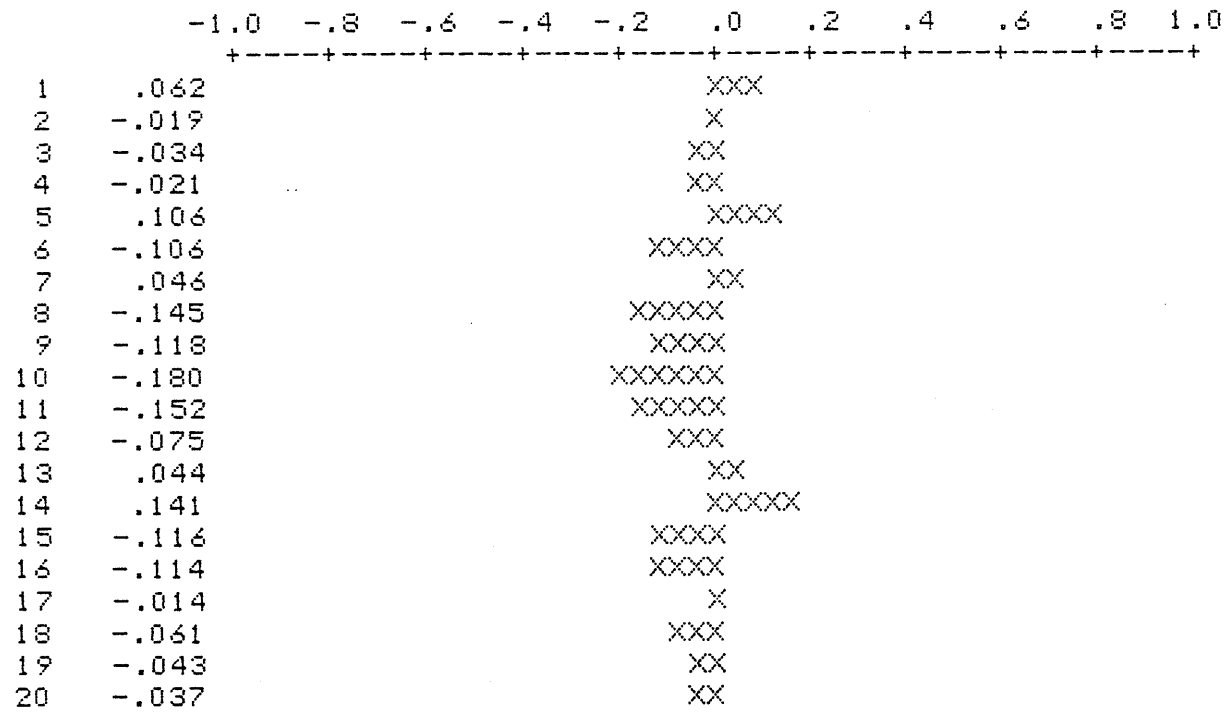


図3. 16: Log (M2+CD) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (M2+CD) Residuals
Lagged Dependant Variable
Sims Test)

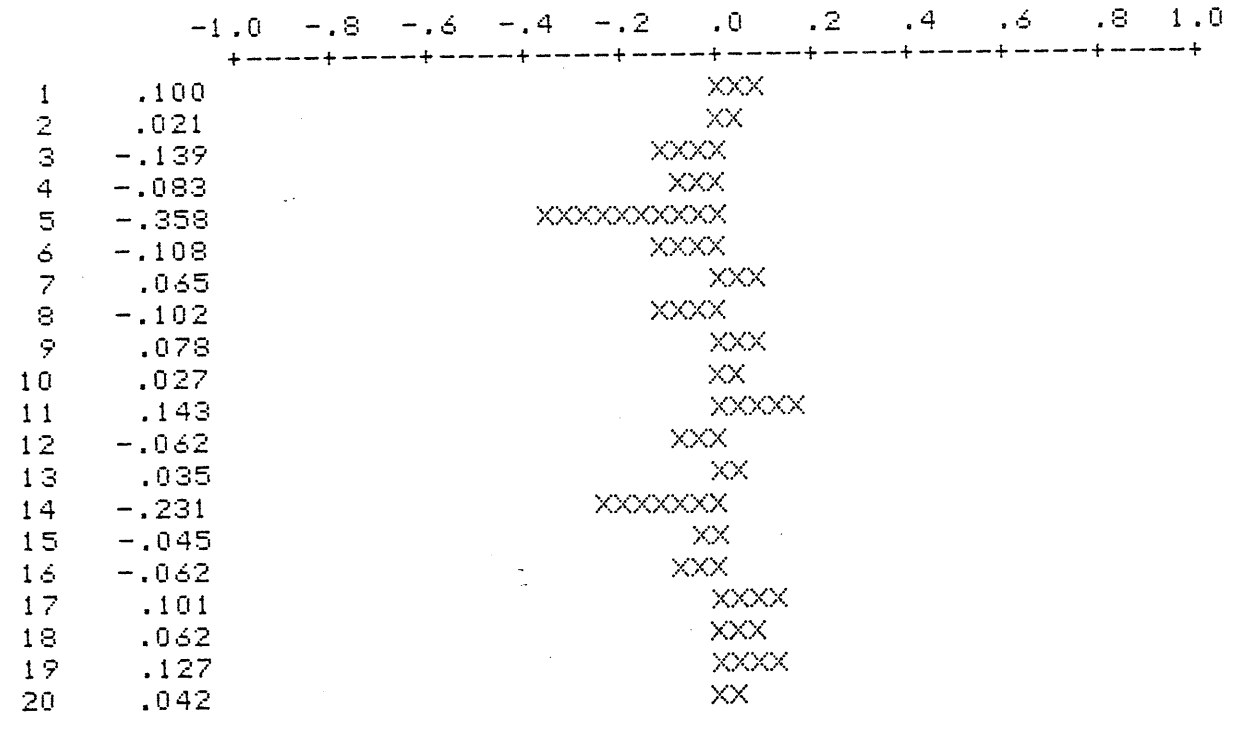


図3. 17: Log (RGDP) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (RGDP) Residuals
OLS Sims Test)

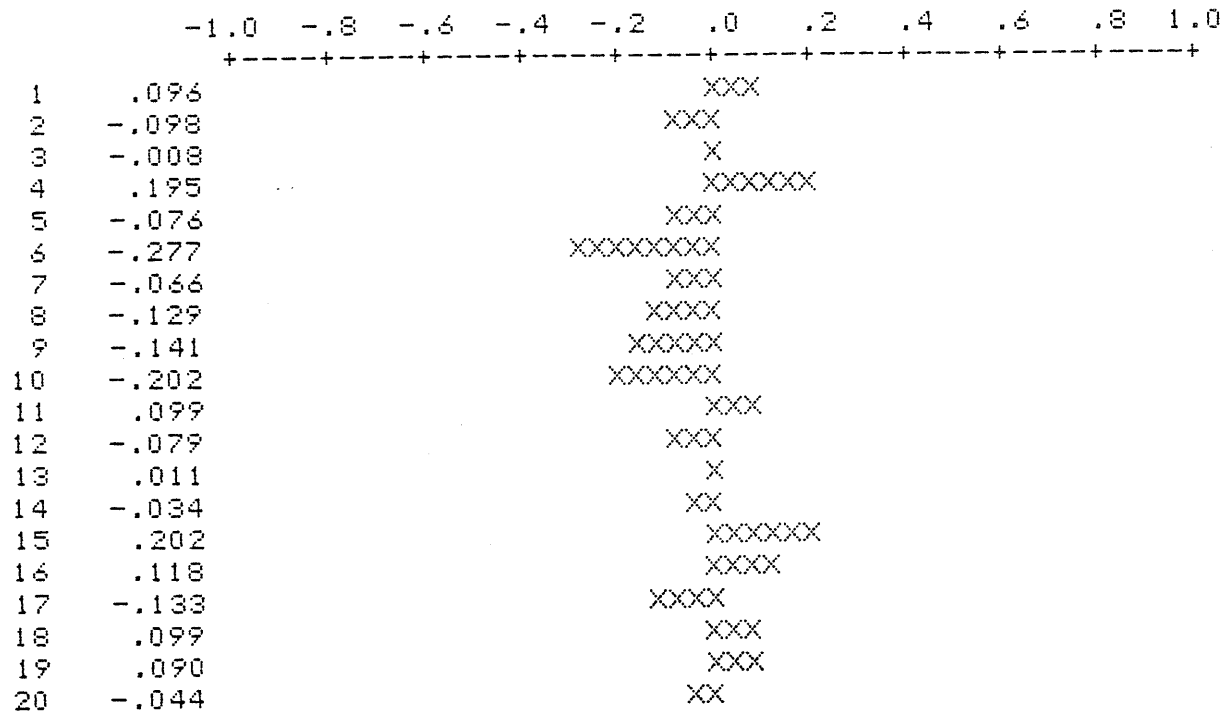


図3.18: Log (RGDP) 残差の自己相関関数

(ACF of Log (RGDP) Residuals
Cochrane-Orcutt Sims Test)

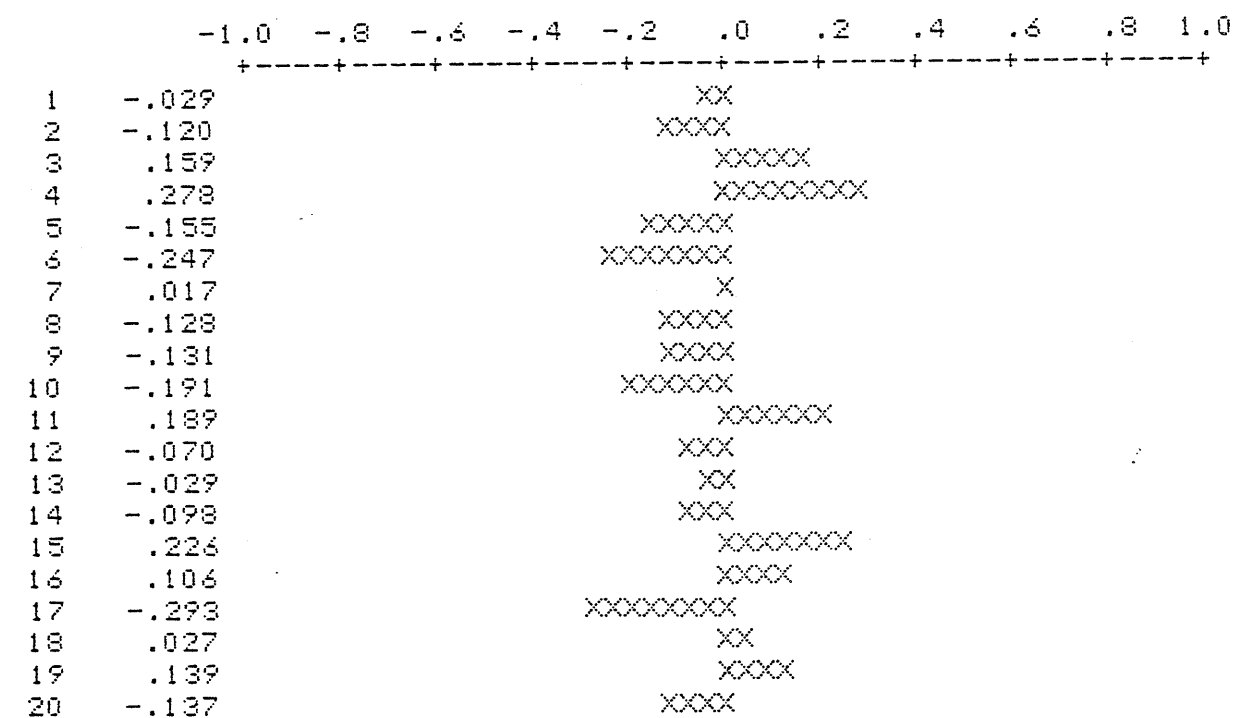


図 4. 1 : 実質国内総生産 (対前年同期比)

$$[QRGDP_t = RQDP_t / RQDP_{t-4}]$$

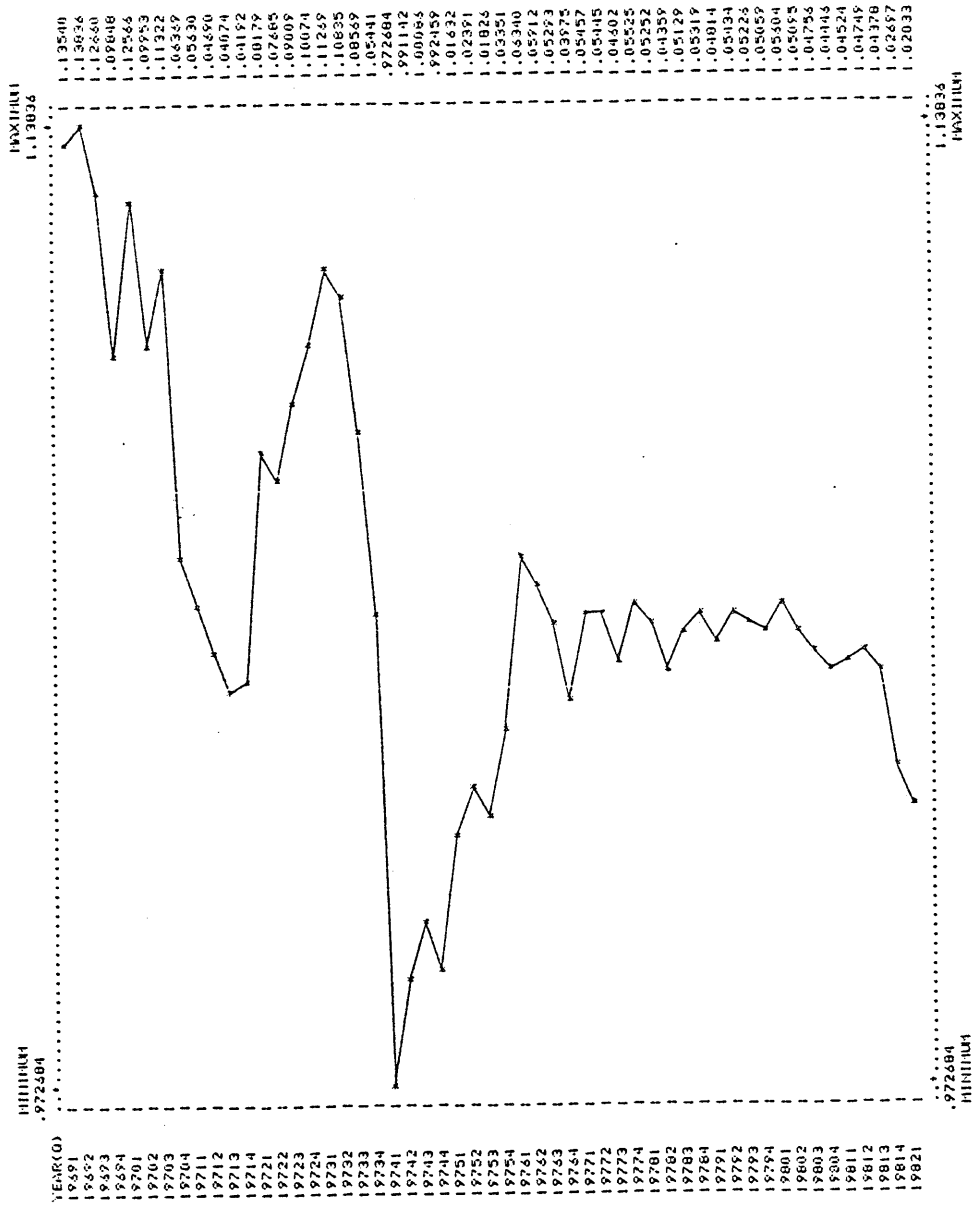


図4. 2: GDPデフレーター (対前年同期比)

$$(QP_t = P_t / P_{t-4})$$

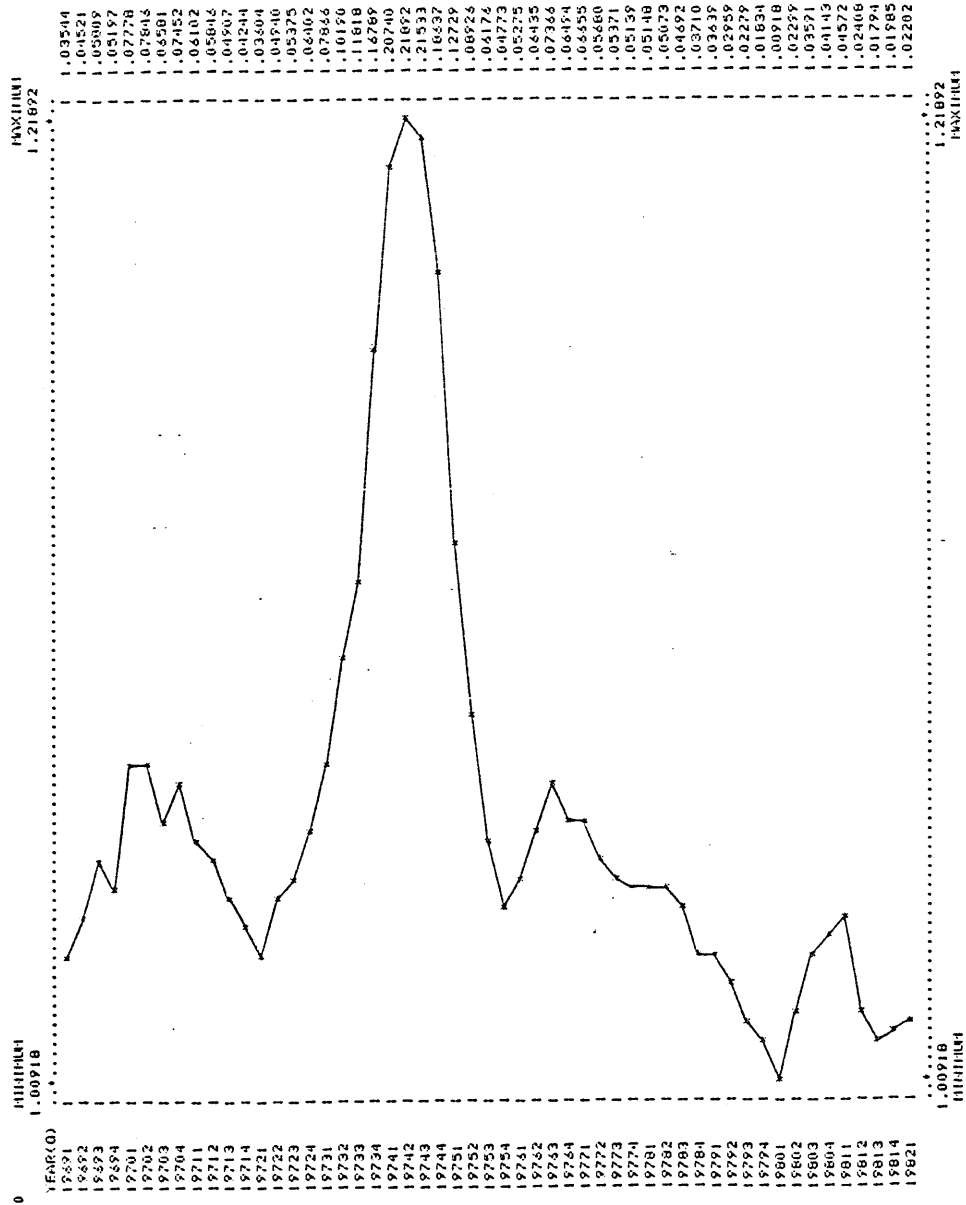


图 4. 3 : M2 + CD (对前年同期比)

$$[QM2 = (M2 + CD)_t / (M2 + CD)_{t-4}]$$

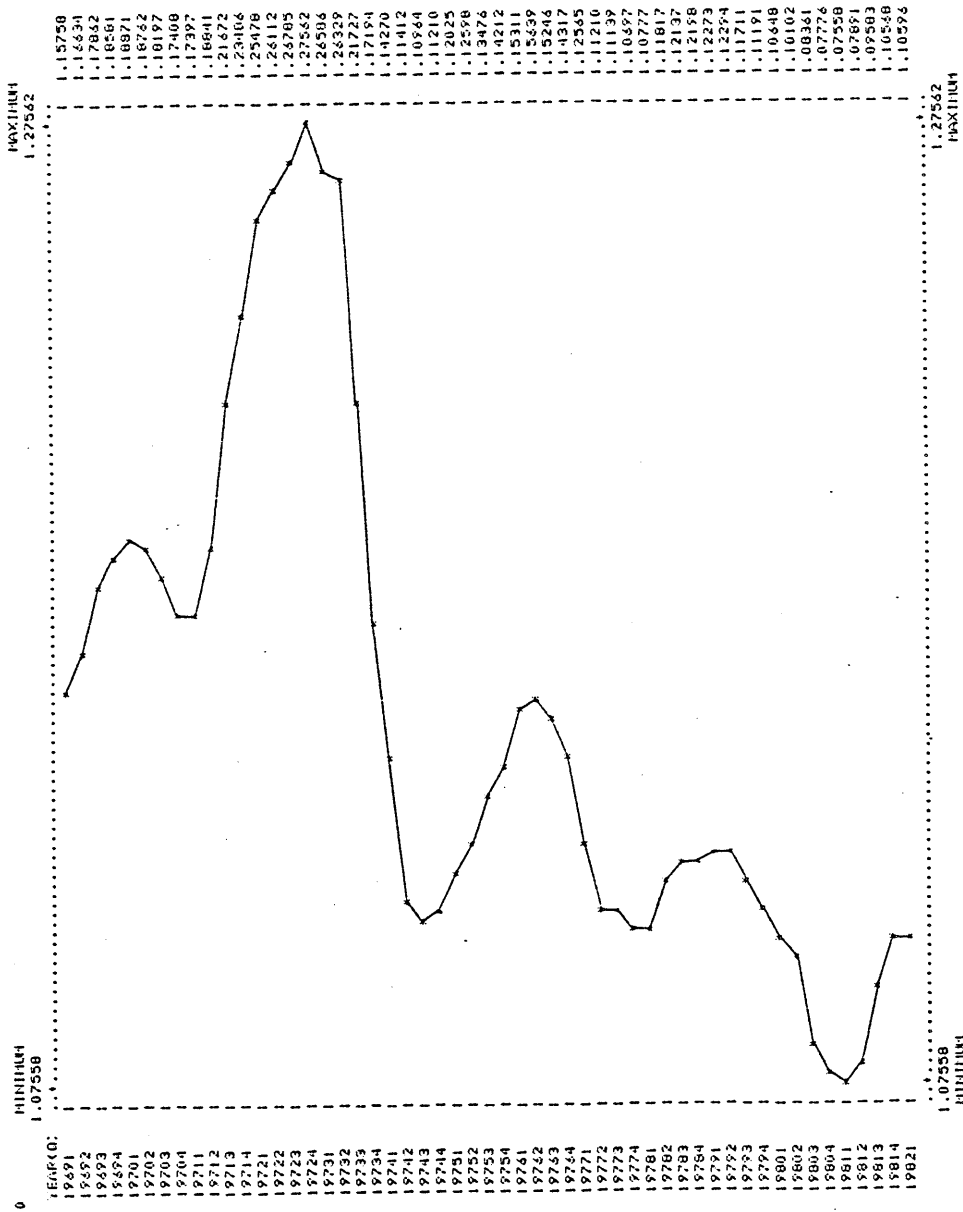


図4. 4 : コール・レート (対前年同期比)

$$[QCall = Callrate_t / Callrate_{t-4}]$$

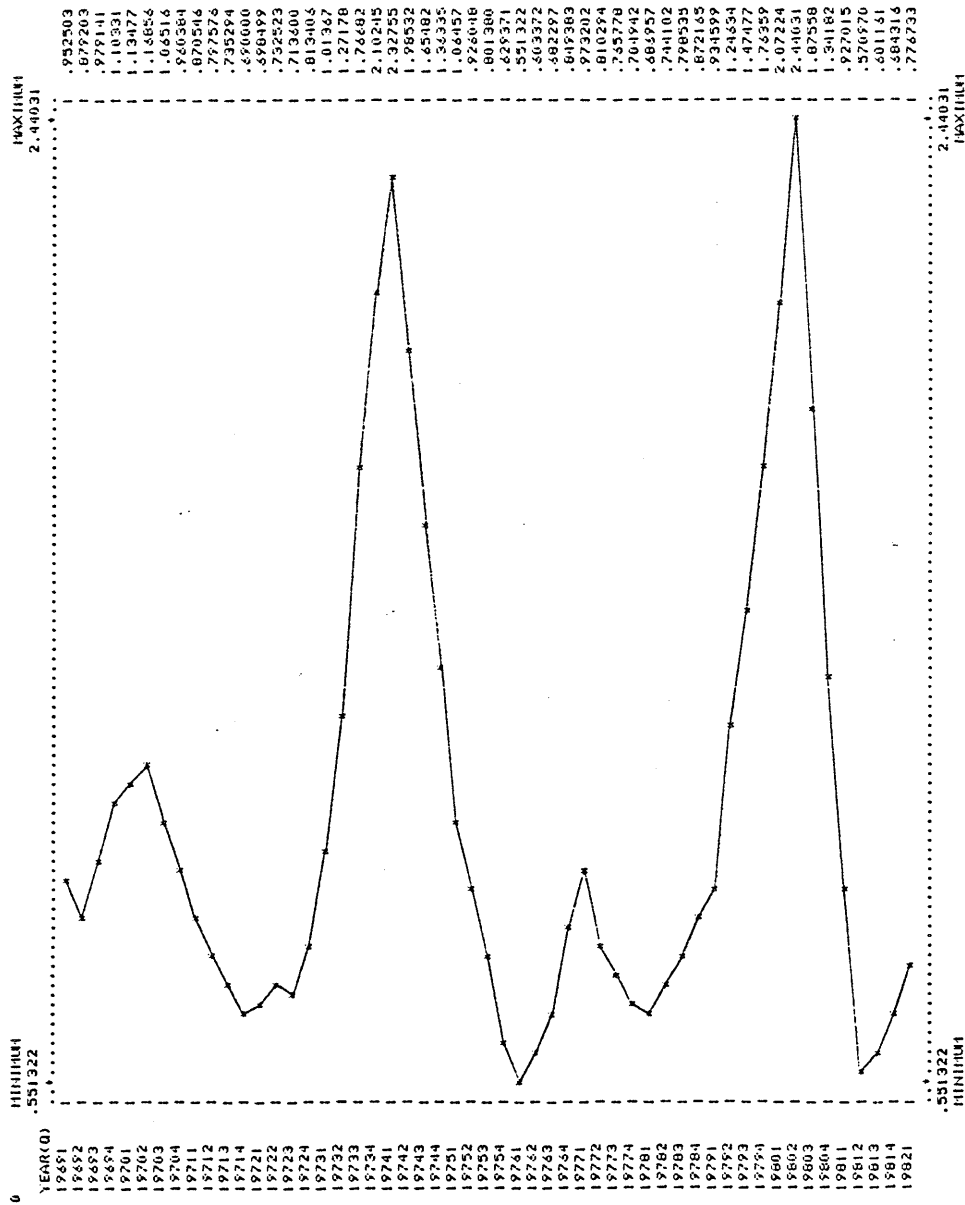


図4.5： 政府総支出（対前年同期比）

$$\{QGE = GE_t / GE_{t-4}\}$$

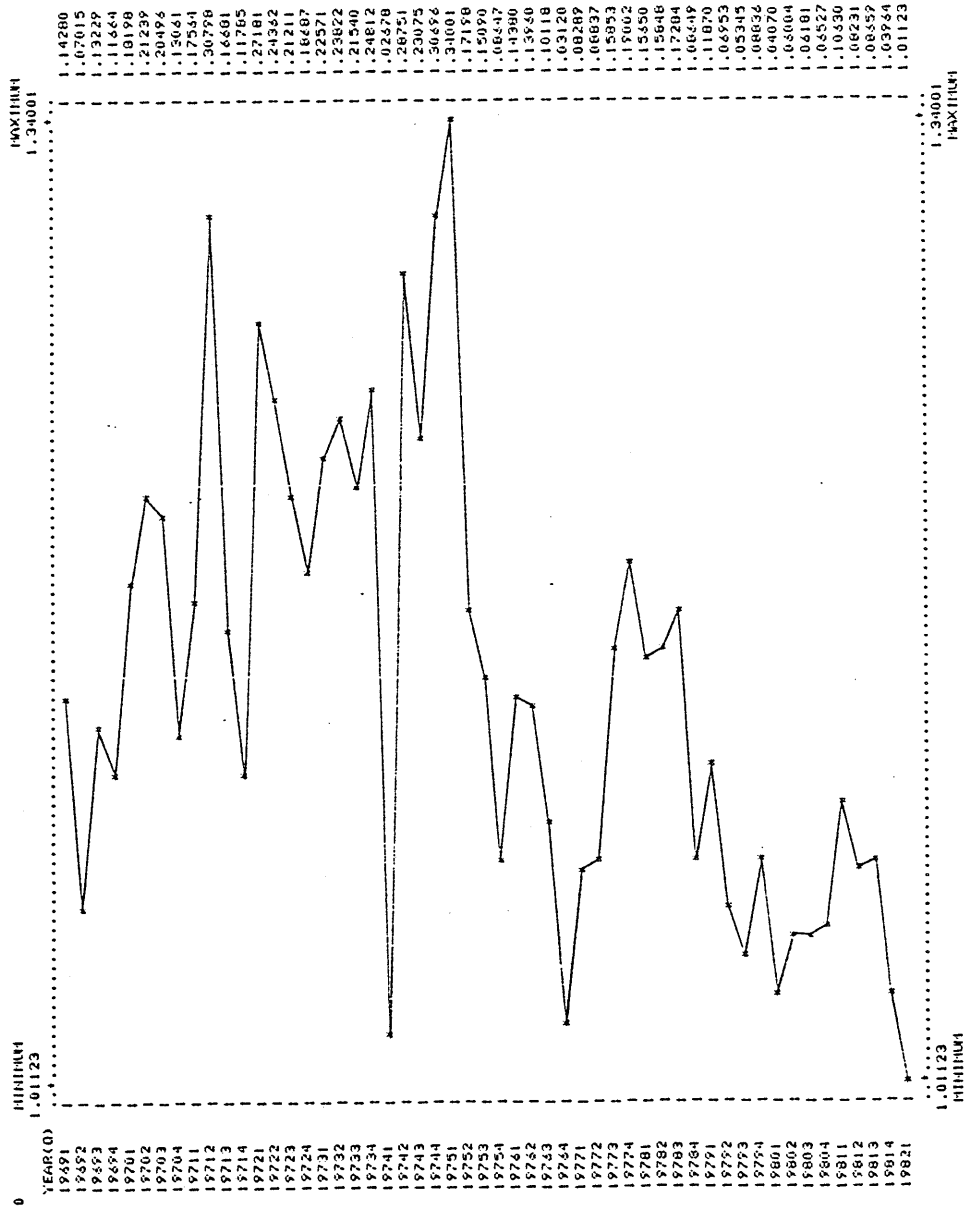


図4.6: 実質国内総生産 (対前年同期比) の自己相関関数
 (ACF of QRGDP)

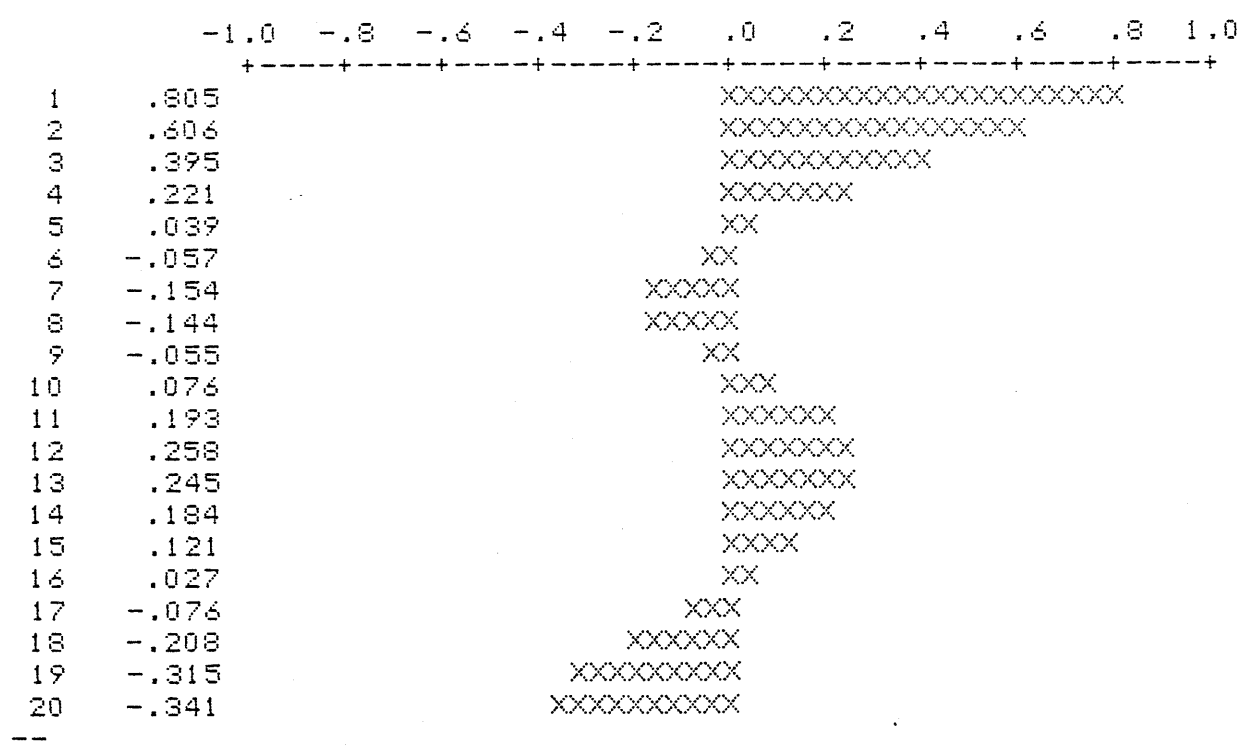


図4. 7: 実質国内総生産 (対前年同期比) の偏自己相関関数
(PACF of QRGDP)

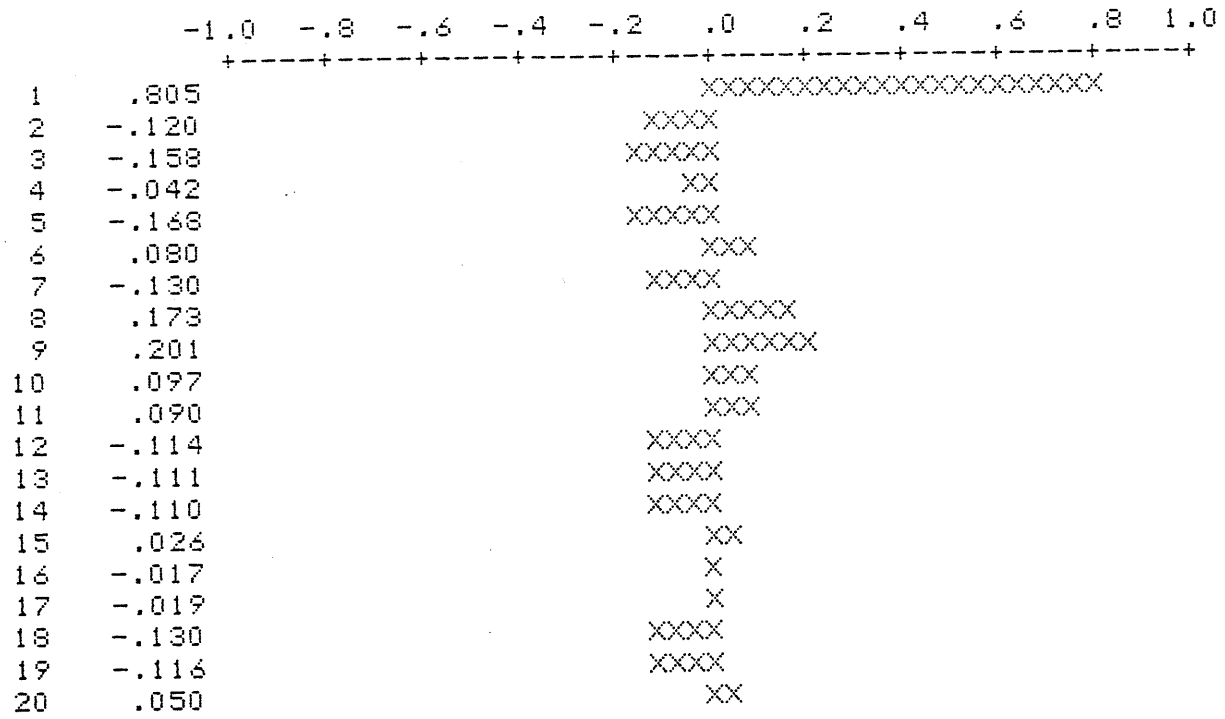


図4. 8 : M2 + CD (対前年同期比) の自己相関関数
 (ACF of QM2)

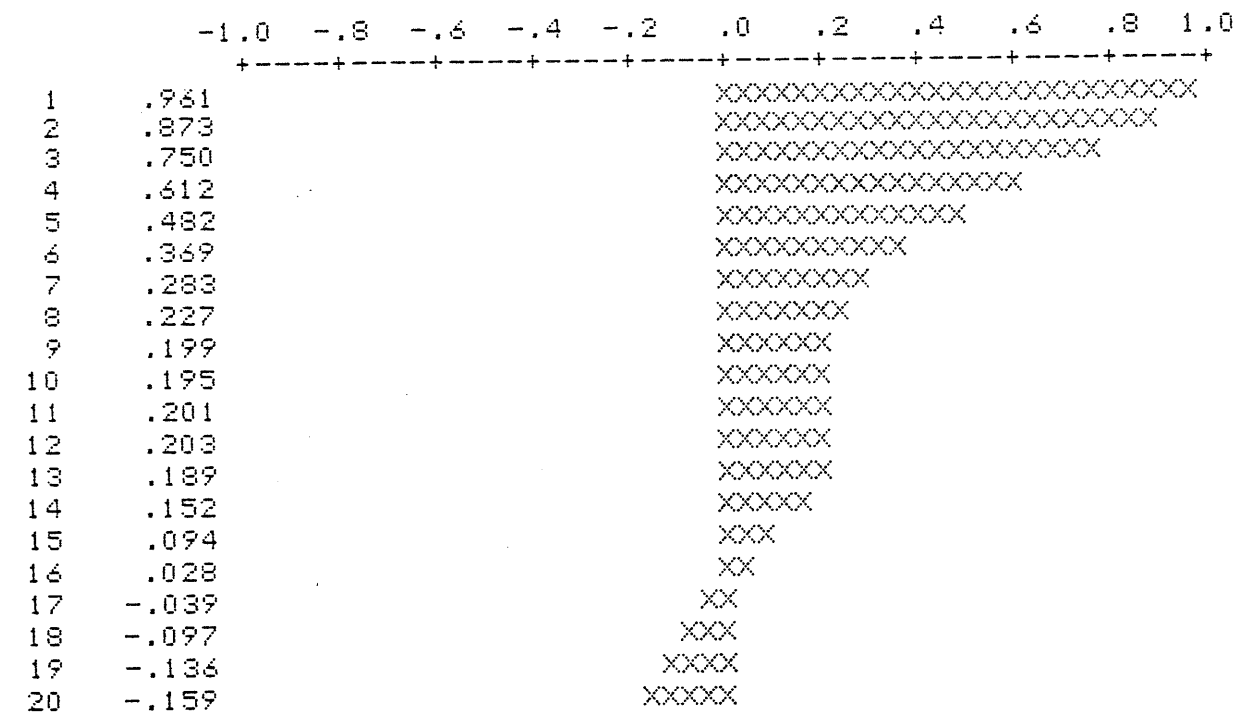


図4.9: M2+CD (対前年同期比) の偏自己相関関数
 (PACF of QM2)

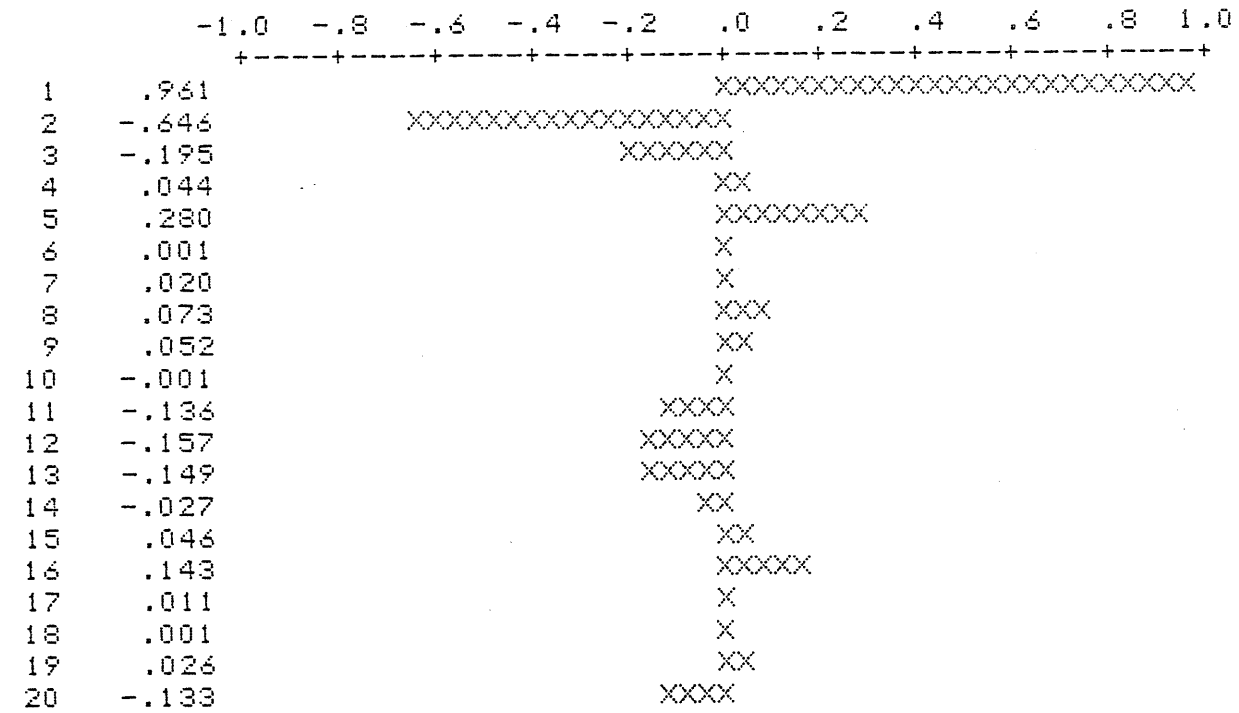


図4. 10 : 実質国内総生産 (対前年同期比) と M2 + CD (対前年同期比) の
 相互相関関数
 (CCF of QRGDP and QM2)

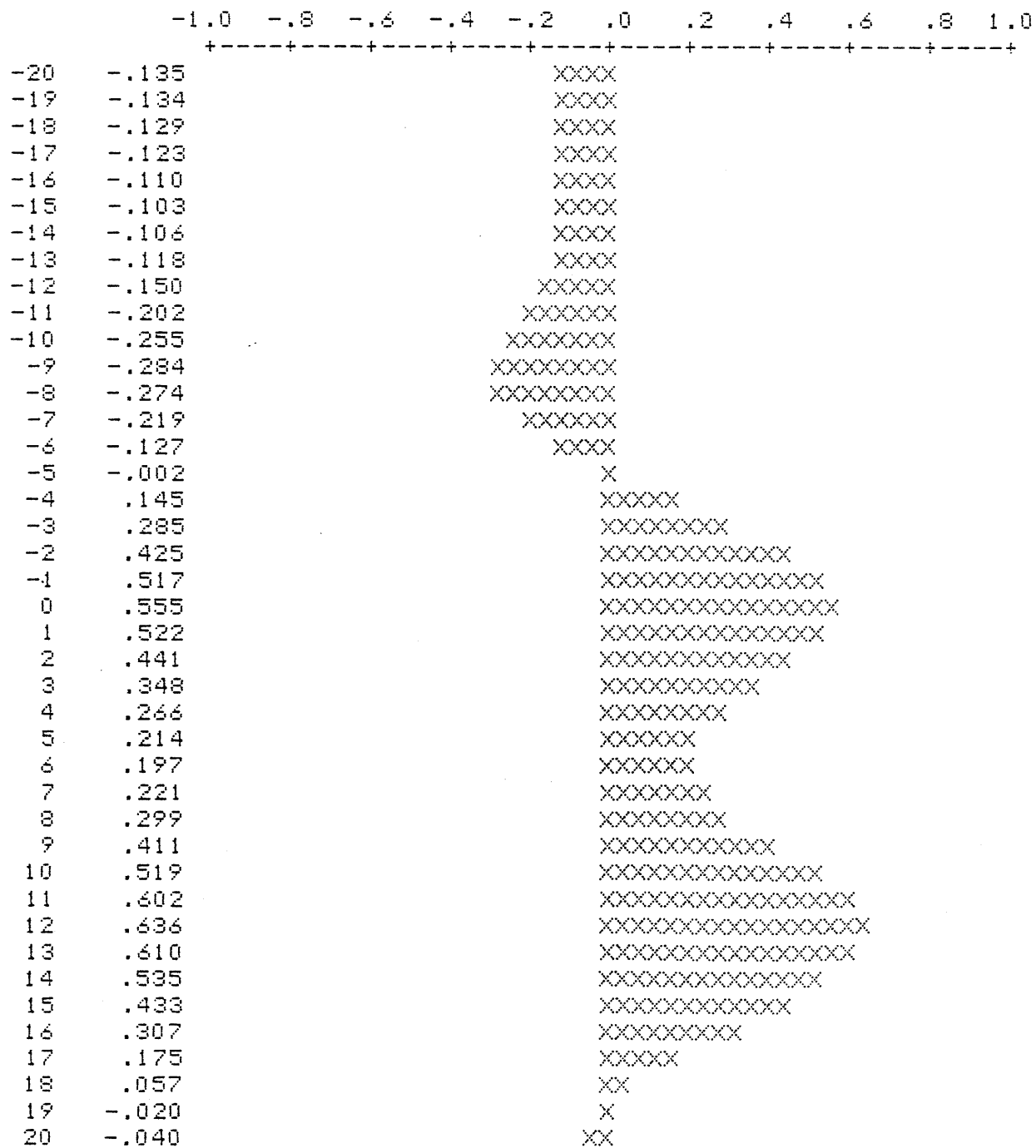


表3. 1: 原系列データ (四半期)

(Original Data Set)

RGDP: Gross Domestic Product at market prices in calendar year of 1975, Billion yen, Economic Planning Agency.

P: Gross Domestic Product Deflator, 1975=100, Economic Planning Agency.

M2+CD: (Average Outstanding) Money Supply plus Certificate of Deposits, Billion yen, The Bank of Japan.

Callrate: Average (Unconditional Central) Callrate at Tokyo, percent per Annum, The Bank of Japan.

GE: Public Expenditure, Billion yen, Economic Planning Agency.

YEAR(Q)	RGDP	P	M2+CD	CALLRATE	GE
19681	21047.60	53.89	32686.50	7.79	1878.20
19682	21828.60	54.63	33753.50	8.03	1538.10
19683	23667.80	54.57	34854.40	8.15	1805.90
19684	29046.10	57.53	36487.90	7.55	3396.80
19691	23897.40	55.80	37837.10	7.42	2146.40
19692	24848.90	57.10	39368.10	7.06	1646.00
19693	26664.20	57.74	41080.20	7.98	2044.80
19694	31906.60	60.52	43267.90	8.33	3793.00
19701	26900.40	60.14	44977.30	8.42	2537.00
19702	27322.10	61.58	46754.40	8.25	1995.60
19703	29683.00	61.54	48555.70	8.50	2463.90
19704	33938.80	65.03	50800.00	8.00	4288.40
19711	28415.00	63.81	52802.00	7.33	2982.60
19712	28603.50	65.18	55563.30	6.58	2610.20
19713	30892.40	64.56	59078.80	6.25	2874.90
19714	35361.40	67.79	62730.90	5.52	4793.80
19721	30739.20	66.11	66254.90	5.12	3793.30
19722	30801.70	68.40	70071.70	4.82	3246.10
19723	33675.50	68.03	74902.80	4.46	3484.70
19724	38923.70	72.13	80020.70	4.49	5689.60
19731	34203.30	71.31	83869.70	5.19	4649.50
19732	34139.20	75.37	88521.20	6.13	4019.40
19733	36561.00	76.07	91177.20	7.88	4235.30
19734	41041.50	84.24	93779.60	9.44	7101.30
19741	33269.00	86.10	95837.60	12.08	4774.00
19742	33836.80	91.87	98623.20	12.17	5175.00
19743	36592.30	92.45	101174.30	13.04	5212.60
19744	40732.00	99.94	104292.40	12.87	9281.10
19751	33811.80	97.06	107361.70	12.86	6397.20
19752	34645.80	100.07	111047.70	11.27	6065.00
19753	37260.60	98.16	114808.20	10.45	5999.20
19754	42096.90	104.71	119114.90	8.10	10083.60
19761	35955.40	102.18	123799.90	7.09	7317.10
19762	36694.00	106.51	128414.10	6.80	6911.70
19763	39232.90	105.39	132312.20	7.13	6606.20
19764	43770.20	111.51	136169.00	6.88	10398.20
19771	37917.40	108.98	139355.20	6.90	7923.60
19772	38691.80	112.56	142809.20	5.51	7522.50
19773	41038.30	111.05	147049.90	5.46	7653.50
19774	46188.70	117.24	150734.60	4.85	12374.10
19781	39908.90	114.59	154374.10	4.74	9163.60
19782	40378.50	118.27	159685.20	4.10	8714.70
19783	43143.10	116.26	164897.50	4.36	8976.30
19784	48645.40	121.59	169121.10	4.23	13444.30
19791	41830.00	118.76	173320.10	4.43	10251.30
19792	42572.50	121.77	179316.70	5.11	9320.60
19793	45397.70	118.91	184209.00	6.43	9456.10
19794	51106.30	123.82	188047.00	7.46	14632.20
19801	44174.20	119.85	191775.20	9.18	10668.50
19802	44741.60	124.57	197431.00	12.47	9880.20
19803	47556.90	123.18	199610.60	12.06	10040.60
19804	53378.40	128.95	202669.50	10.01	15587.20
19811	46172.80	125.33	206269.90	8.51	11802.60
19812	46866.20	127.57	213009.70	7.12	10693.40
19813	49639.00	125.39	218739.70	7.25	10910.00
19814	54817.90	131.51	224087.10	6.85	16205.10
19821	47111.60	128.09	228125.20	6.61	11935.10

表 3. 2 :

最小自乗推定 I

RIGHT-HAND VARIABLE	ESTIMATED COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T- STATISTIC
C	9.90919	.163200E-01	607.179
D	.258368	.242667E-01	10.6470
D1	-.178804	.740211E-02	-24.1558
D2	-.176563	.752730E-02	-23.4564
D3	-.120932	.753507E-02	-16.0492
TIME	.208792E-01	.626759E-03	33.3130
DTIME	-.954217E-02	.716880E-03	-13.3107

表 3. 3 :

最小自乗推定 I I

RIGHT-HAND VARIABLE	ESTIMATED COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T- STATISTIC
C	9.72127	.205826E-01	472.305
D	.754425	.306048E-01	24.6505
D1	-.325740E-03	.933546E-02	-.348928E-01
D2	.344611E-02	.949333E-02	.363003
D3	.181708E-02	.950313E-02	.191208
TIME	.478861E-01	.790461E-03	60.5800
DTIME	-.203720E-01	.904120E-03	-22.5325

表 3. 4 :

最小自乗推定 I I I

RIGHT-HAND VARIABLE	ESTIMATED COEFFICIENT	STANDARD ERROR	T- STATISTIC
C	9.72226	.191097E-01	508.760
D	.754722	.297447E-01	25.3733
TIME	.478988E-01	.767464E-03	62.4118
DTIME	-.203872E-01	.878149E-03	-23.2161

表3. 5 : AIC值

AIC-OF LOG(RGDP)-EQUATION

I	LOG OF LIKELIHOOD	AIC
1	155.185	-296.37
2	155.371	-294.742
3	155.624	-293.248
4	158.257	-296.514
5	168.871	-315.774
6	170.702	-317.404
7	170.795	-315.59
8	171.274	-314.548
9	171.32	-312.64
10	171.441	-310.882
11	171.522	-309.044
12	171.834	-307.668
13	172.463	-306.926
14	175.328	-310.656
15	175.387	-308.774

AIC MINIMUM AT M=6

AIC-VALUE OF LOG(M2+CD)-EQUATION

I	LOG OF LIKELIHOOD	AIC
1	156.732	-299.464
2	161.533	-307.066
3	161.534	-305.068
4	161.551	-303.102
5	161.743	-301.486
6	163.140	-302.28
7	164.342	-302.684
8	164.611	-301.222
9	167.414	-304.828
10	167.912	-303.824
11	167.916	-301.832
12	168.605	-301.21
13	168.88	-299.76
14	169.589	-299.178
15	170.696	-298.192

AIC MINIMUM AT M=2

表4. 1: データ (対前年同期比) (Data Set)

(Changes from same quarter of previous year)

YEAR(Q)	RGDP	P	M2+CD	CALLAYTE	GE
19691	1.1354	1.0354	1.1576	.9529	1.1428
19692	1.1384	1.0452	1.1663	.8792	1.0702
19693	1.1266	1.0581	1.1786	.9791	1.1323
19694	1.0985	1.0520	1.1858	1.1042	1.1166
19701	1.1257	1.0778	1.1887	1.1338	1.1820
19702	1.0995	1.0785	1.1876	1.1686	1.2124
19703	1.1132	1.0658	1.1820	1.0647	1.2050
19704	1.0637	1.0745	1.1741	.9600	1.1306
19711	1.0563	1.0610	1.1740	.8713	1.1756
19712	1.0469	1.0585	1.1884	.7980	1.3080
19713	1.0407	1.0491	1.2167	.7353	1.1668
19714	1.0419	1.0424	1.2349	.6904	1.1179
19721	1.0818	1.0360	1.2548	.6986	1.2718
19722	1.0769	1.0494	1.2611	.7316	1.2436
19723	1.0901	1.0537	1.2678	.7141	1.2121
19724	1.1007	1.0640	1.2756	.8123	1.1869
19731	1.1127	1.0787	1.2659	1.0124	1.2257
19732	1.1084	1.1019	1.2633	1.2727	1.2382
19733	1.0857	1.1182	1.2173	1.7662	1.2154
19734	1.0544	1.1679	1.1719	2.1048	1.2481
19741	.9727	1.2074	1.1427	2.3284	1.0268
19742	.9911	1.2189	1.1141	1.9859	1.2875
19743	1.0009	1.2153	1.1096	1.6537	1.2308
19744	.9925	1.1864	1.1121	1.3629	1.3070
19751	1.0163	1.1273	1.1202	1.0651	1.3400
19752	1.0239	1.0893	1.1260	.9255	1.1720
19753	1.0183	1.0618	1.1348	.8018	1.1509
19754	1.0335	1.0477	1.1421	.6294	1.0865
19761	1.0634	1.0528	1.1531	.5514	1.1438
19762	1.0591	1.0644	1.1564	.6036	1.1396
19763	1.0529	1.0737	1.1525	.6818	1.1012
19764	1.0397	1.0649	1.1432	.8498	1.0312
19771	1.0546	1.0665	1.1256	.9723	1.0829
19772	1.0544	1.0568	1.1121	.8103	1.0884
19773	1.0460	1.0537	1.1114	.7666	1.1585
19774	1.0553	1.0514	1.1070	.7041	1.1900
19781	1.0525	1.0515	1.1078	.6868	1.1565
19782	1.0436	1.0507	1.1182	.7447	1.1585
19783	1.0513	1.0469	1.1214	.7980	1.1728
19784	1.0532	1.0371	1.1220	.8721	1.0865
19791	1.0481	1.0364	1.1227	.9346	1.1187
19792	1.0543	1.0296	1.1229	1.2461	1.0695
19793	1.0523	1.0228	1.1171	1.4755	1.0535
19794	1.0506	1.0183	1.1119	1.7642	1.0884
19801	1.0560	1.0092	1.1065	2.0730	1.0407
19802	1.0510	1.0230	1.1010	2.4387	1.0600
19803	1.0476	1.0359	1.0836	1.8751	1.0618
19804	1.0445	1.0414	1.0778	1.3424	1.0653
19811	1.0452	1.0457	1.0756	.9277	1.1063
19812	1.0475	1.0241	1.0789	.5712	1.0823
19813	1.0438	1.0179	1.0958	.6013	1.0866
19814	1.0270	1.0199	1.1057	.6843	1.0396
19821	1.0203	1.0220	1.1060	.7768	1.0112

表4. 2 : FPE・AIC値(ケースI)

I	FPEC	RFPEC	AIC
0	.28019D-05	.10000D+01	-.68162D+03
1	.10446D-06	.37283D-01	-.85596D+03
2	.68159D-07	.24326D-01	-.87864D+03
3	.71034D-07	.25353D-01	-.87655D+03
4	.80081D-07	.28581D-01	-.87038D+03
5	.79459D-07	.28360D-01	-.87109D+03
6	.92255D-07	.32926D-01	-.86361D+03
7	.98567D-07	.35179D-01	-.86071D+03
8	.10285D-06	.36707D-01	-.85926D+03
9	.11262D-06	.40195D-01	-.85549D+03
10	.13042D-06	.46546D-01	-.84905D+03
11	.15426D-06	.55058D-01	-.84181D+03
12	.18044D-06	.64400D-01	-.83557D+03
13	.21270D-06	.75915D-01	-.82940D+03
14	.26120D-06	.93225D-01	-.82161D+03
15	.31448D-06	.11224D+00	-.81555D+03
MINIMUM FPEC= .68159D-07			MINIMUM RFPEC= .24326D-01
MINIMUM AIC= -.87864D+03			ATTAINED AT M= 2

表 4. 3 : 共分散・相関係数・係数推定値 [ケース I]

```

SD(I,J)
MATRIX          2   X   2
                1       2
    1   .13009D-03  .55037D-04
    2   .55037D-04  .38212D-03

NORMALIZED SD
MATRIX          2   X   2
                1       2
    1   .10000D+01  .24685D+00
    2   .24685D+00  .10000D+01

A(I,J)
M= 2
I= 1
MATRIX          2   X   2
                1       2
    1   .15816D+01 -.10998D-01
    2   .56115D+00  .72809D+00

I= 2
MATRIX          2   X   2
                1       2
    1   -.62516D+00 -.48234D-01
    2   -.50800D+00  .28873D-02

```


表4. 4: FPE・AIC値(ケースI I)

I	FPEC	RFPEC	AIC	
0	.51982D-08	.10000D+01	-.10170D+04	
1	.24607D-10	.47337D-02	-.13007D+04	
2	.12646D-10	.24328D-02	-.13362D+04	
3	.15593D-10	.29997D-02	-.13256D+04	
4	.20630D-10	.39687D-02	-.13116D+04	
5	.17783D-10	.34209D-02	-.13210D+04	
6	.20707D-10	.39835D-02	-.13151D+04	
7	.25810D-10	.49653D-02	-.13066D+04	
8	.29145D-10	.56068D-02	-.13046D+04	
9	.37758D-10	.72638D-02	-.12969D+04	
10	.56087D-10	.10790D-01	-.12840D+04	
11	.77319D-10	.14874D-01	-.12779D+04	
12	.11862D-09	.22819D-01	-.12699D+04	
13	.21771D-09	.41882D-01	-.12580D+04	
14	.43895D-09	.84443D-01	-.12496D+04	
15	.62048D-09	.11937D+00	-.12749D+04	
MINIMUM FPEC= .12646D-10			MINIMUM RFPEC= .24328D-02	ATTAINED AT M= 2
MINIMUM AIC= -.13362D+04				

表4. 5: 共分散・相関係数・係数推定値(ケース I I)

```
SD(I,J)
MATRIX      3      X      3
             1      2      3
1      .15075D-03  .17833D-04  -.38138D-04
2      .17833D-04  .11694D-03  .36545D-04
3      -.38138D-04  .36545D-04  .35353D-03
```

```
INORMALIZED SD
MATRIX      3      X      3
             1      2      3
1      .10000D+01  .13431D+00  -.16521D+00
2      .13431D+00  .10000D+01  .17973D+00
3      -.16521D+00  .17973D+00  .10000D+01
```

```
A(I,J)
M= 2
I= 1
MATRIX      3      X      3
             1      2      3
1      .12427D+01  -.50881D+00  .87690D-01
2      -.23328D+00  .15018D+01  -.62911D-01
3      -.31816D+00  .41120D+00  .63940D+00
```

```
I= 2
MATRIX      3      X      3
             1      2      3
1      -.44109D+00  .63115D+00  -.11901D+00
2      .19450D+00  -.51672D+00  -.68388D-02
3      .22214D+00  -.30322D+00  .36000D-01
```

表4. 6: FPE・AIC値(ケースIII)

I	FPEC	RFPEC	AIC
0	.90213D-09	.10000D+01	-.11118D+04
1	.73069D-12	.80997D-03	-.14892D+04
2	.30806D-12	.34148D-03	-.15356D+04
3	.47196D-12	.52317D-03	-.15144D+04
4	.76444D-12	.84737D-03	-.14917D+04
5	.71206D-12	.78932D-03	-.15002D+04
6	.11071D-11	.12272D-02	-.14842D+04
7	.16554D-11	.18350D-02	-.14742D+04
8	.19758D-11	.21901D-02	-.14816D+04
9	.27124D-11	.30066D-02	-.14897D+04
10	.51360D-11	.56932D-02	-.14941D+04
11	.91643D-11	.10159D-01	-.15262D+04
12	.77810D-10	.86252D-01	-.15363D+04
MINIMUM FPEC= .30806D-12			MINIMUM RFPEC= .34148D-03
MINIMUM AIC= -.15356D+04			ATTAINED AT M= 2

表 4. 7 : 共分散・相関係数・係数推定値 (ケース I I I)

SD(I,J)
MATRIX

	4	X	4	
	1		2	3
1	.14528D-03		.25021D-03	-.33303D-04
2	.25021D-03		.19565D-01	-.45037D-03
3	-.33303D-04		-.45037D-03	.34841D-03
4	.27296D-04		.13333D-03	.30424D-04

NORMALIZED SD
MATRIX

	4	X	4	
	1		2	3
1	.10000D+01		.14841D+00	-.14802D+00
2	.14841D+00		.10000D+01	-.17250D+00
3	-.14802D+00		-.17250D+00	.10000D+01
4	.23302D+00		.98084D-01	.16771D+00

A(I,J)
M= 2
I= 1
MATRIX

	4	X	4	
	1		2	3
1	.12240D+01		.11855D-01	.10814D+00
2	-.11729D+01		.15117D+01	.13675D+01
3	-.32384D+00		-.83813D-02	.61915D+00
4	-.14073D+00		-.26253D-01	-.92537D-01

I= 2
MATRIX

	4	X	4	
	1		2	3
1	-.39891D+00		-.13170D-01	-.13453D+00
2	.10697D+01		-.72546D+00	-.75156D+00
3	.20012D+00		.12285D-01	.52424D-01
4	.79991D-01		.21124D-01	.12785D-01

表4. 8 : FPE・AIC値 (ケースIV)

I	FPEC	RFPEC	AIC
0	.29788D-11	.10000D+01	-.14166D+04
1	.18961D-14	.63653D-03	-.18069D+04
2	.10740D-14	.36056D-03	-.18384D+04
3	.22642D-14	.76011D-03	-.18024D+04
4	.43122D-14	.14476D-02	-.17753D+04
5	.57620D-14	.19344D-02	-.17722D+04
6	.80620D-14	.27065D-02	-.17750D+04
7	.16996D-13	.57057D-02	-.17691D+04
8	.34523D-13	.11589D-01	-.17883D+04
9	.73852D-13	.24793D-01	-.18546D+04
10	.97348D-11	.32680D+01	-.18909D+04
	MINIMUM FPEC= .10740D-14	MINIMUM RFPEC=	.36056D-03
	MINIMUM AIC= -.18384D+04		ATTAINED AT M= 2

表 4. 9 : 共分散・相関係数・係数推定値 (ケース I V)

SD(I, J)		X					
MATRIX		5	1	2	3	4	5
1		.13995D-03	.55153D-04	-.44842D-04	.28125D-04	.28125D-04	.25947D-03
2		.55153D-04	.26029D-02	.27196D-03	.92057D-04	.92057D-04	-.67789D-03
3		-.44842D-04	.27196D-03	.28638D-03	.26103D-04	.26103D-04	-.41591D-03
4		.28125D-04	.92057D-04	.26103D-04	.93313D-04	.93313D-04	.13427D-03
5		.25947D-03	-.67789D-03	-.41591D-03	.13427D-03	.13427D-03	.19543D-01

NORMALIZED SD		X					
MATRIX		5	1	2	3	4	5
1		.10000D+01	.91379D-01	-.22399D+00	.24611D+00	.24611D+00	.15689D+00
2		.91379D-01	.10000D+01	.31499D+00	.18679D+00	.18679D+00	-.95046D-01
3		-.22399D+00	.31499D+00	.10000D+01	.15968D+00	.15968D+00	-.17580D+00
4		.24611D+00	.18679D+00	.15968D+00	.10000D+01	.10000D+01	.99428D-01
5		.15689D+00	-.95046D-01	-.17580D+00	.99428D-01	.99428D-01	.10000D+01

A(I, J)		X					
MATRIX		5	1	2	3	4	5
1		.12418D+01	-.47553D-01	.15825D+00	-.47297D+00	-.47297D+00	.10146D-01
2		-.98907D-02	.35552D-01	-.77036D+00	.18329D+01	.18329D+01	-.60597D-01
3		-.46461D+00	-.10857D+00	.60880D+00	.67921D+00	.67921D+00	-.13108D-01
4		-.17309D+00	.64684D-02	-.11995D+00	.14147D+01	.14147D+01	-.26156D-01
5		-.11341D+01	.84868D-01	.13266D+01	-.33195D+01	-.33195D+01	.15151D+01

I= 2		X					
MATRIX		5	1	2	3	4	5
1		-.37405D+00	.83549D-02	-.17870D+00	.59826D+00	.59826D+00	-.11701D-01
2		.10101D+01	-.22196D+00	.65313D+00	-.91307D+00	-.91307D+00	.65010D-01
3		.53685D+00	-.10531D+00	.88879D-01	-.39832D+00	-.39832D+00	.15579D-01
4		.12281D+00	-.21665D-01	.41458D-01	-.39623D+00	-.39623D+00	.20914D-01
5		.91649D+00	.33440D-01	-.72610D+00	.34096D+01	.34096D+01	-.72806D+00