

CIRJE-J-191

**TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称
確率的ボラティリティ変動モデルによる分析
— 順列サンプラーによる探索 —**

東京大学大学院経済学研究科大学院生
石原庸博

東京大学大学院経済学研究科
大森裕浩

2008年2月

CIRJE ディスカッションペーパーの多くは
以下のサイトから無料で入手可能です。

http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/03research02dp_j.html

このディスカッション・ペーパーは、内部での討論に資するための未定稿の段階にある論文草稿である。著者の承諾なしに引用・複写することは差し控えられる。

Markov Switching Asymmetric Stochastic Volatility Model with Application to TOPIX Data -A Permutation Sampler Approach-

Abstract

The stochastic volatility model has been popular to explain a dynamic structure of financial time series such as asset returns. In this paper, we first consider the asymmetry that the increase in the volatility is followed by the decrease in the asset return. Then, we consider a Markov switching of two (high and low) volatility states using a random state variable which follows a Markov process. The restrictions for the identification of the switching parameters are determined by using a permutation sampler with Markov chain Monte Carlo method. The Markov switching asymmetric stochastic volatility model is applied to TOPIX returns data, and model comparisons are conducted.

TOPIX 収益率のマルコフ・スイッチング非対称 確率的ボラティリティ変動モデルによる分析 - 順列サンプラーによる探索 - *

石原庸博[†]

大森裕浩[‡]

概要

株式や株価指数等の危険資産収益率のボラティリティ変動モデルとして確率的ボラティリティ変動モデルがしばしば用いられており、そのあてはまりの良いことが知られている。本稿では、収益率の低下が翌日のボラティリティの上昇を引き起こすという非対称性を考慮した確率的ボラティリティ変動モデルにおいて、ボラティリティの2つの状態間の移動がマルコフ過程に従うとするマルコフ・スイッチングモデルを TOPIX 収益率データに適用して実証分析を行った。パラメータの推定にはマルコフ連鎖モンテカルロ法を用い、更に順列サンプラーを追加することでどのパラメータにスイッチが起こるのかを探索的に明らかにし、候補となるモデルの絞込みを行った。またスイッチの無いモデルを含めた複数のモデルを推定し、モデルの比較・検討を行った。

*本稿の作成にあたり渡部敏明教授（一橋大学経済研究所）より貴重なコメントを頂きました。ここに記して深謝致します。

[†]東京大学大学院経済学研究科. E-mail:ee66009@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp

[‡]東京大学大学院経済学研究科:〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1. E-mail:omori@e.u-tokyo.ac.jp

1 はじめに

金融時系列の計量経済分析においては、株式や株価指数等の資産収益率のモデルとして確率的ボラティリティ変動 (Stochastic Volatility, SV) モデルが広く用いられており (例えば Ghysels *et al.* (1996), Shephard (2005), 渡部 (2000)), 非対称性, ジャンプ項, 裾の厚い誤差分布, 長期記憶性など現実のデータの特徴を適切に捕捉できるように多くの拡張が試みられている. その中でも So *et al.* (1998) によって提案されたマルコフ・スイッチング確率的ボラティリティ変動 (Markov Switching Stochastic Volatility, MSSV) モデルは, ボラティリティの大きさの水準が増減する点に注目した拡張であり, その水準を幾つかの状態として捉えて状態がマルコフ過程に従って切り替わる (スイッチする) と仮定している. 通常, 状態の切り替わり方は予め仮定された一部のパラメータに限定されるが, 実証分析では MSSV モデルのあてはまりのよいことが知られている. (例えば Smith (2002), Kalimipalli and Susmel (2002), Shibata and Watanabe (2005), 里吉 (2005) を参照).

MSSV モデルではこれまで幾つかの拡張が行われており, ボラティリティの水準に加えて推移に関するパラメータすべてにマルコフ・スイッチングを仮定するモデル (Hwang *et al.* (2004)) や連続時間の MSSV モデル (Mao and Yuan (2006), Mao *et al.* (2006)) 等がある. 現実には MSSV モデルにおいてどのパラメータの状態が切り替わるのかは明らかではないため, まず Hwang *et al.* (2004) のように, すべてのパラメータの状態が切り替わる可能性を考える必要がある. しかし, すべてのパラメータの状態が必ずしも切り替わるわけではなく, 一部のパラメータの状態だけが切り替わると考えられるため, 本稿ではスイッチングの有無を以下に述べる順列サンプラーも用いることで探索的に行うこととする. また Hwang *et al.* (2004) のモデルでは, 今日の収益率の低下が明日のボラティリティの上昇を招くという非対称性 (asymmetry) が考慮されていないが, 現実のデータでは非対称性の存在が知られており, 本稿では非対称性を考慮した SV モデルの推定を行う. 非対称性を考慮した SV モデルは, 非対称性 SV (Asymmetric SV, ASV) モデルと呼ばれている.

ASV モデルや MSSV モデルの推定では, ボラティリティ等の潜在変数の個数が非常に多いため最尤法による推定が困難な場合が多い. このため, 多くの先行研究でベイズ・アプローチをとり, マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 法を用いてパラメータの事後分布から確率標本を発生させ, 得られた標本をもとに関心のあるパラメータについて統計的推測を行っている. その中でも SV モデルの推定のために提案された, Kim *et al.* (1998) の mixture sampler による事後分布からのサンプリング方法は, 混合正規分布による近似に基づいたその簡便さと効率性の良さから, 実証分析において非常に広く使われている. この mixture sampler では, 非対称性が考慮されていないという欠点がこれまで指摘されていたが, Omori *et al.* (2007) らによって ASV モデルのための mixture sampler に拡張されており, 現在最も有用な推定方法の一つである.

一方, マルコフ・スイッチング (Markov Switching, MS) モデルにおいても, 状態を表す確率変数が観測値と同じ個数あるため, 尤度関数の計算に際しては状態変数の確率関数に関して和を求めるフィルターが, MCMC の計算に際してはこれらの状態変数を効率的にサンプリングする計算方法が必要となる. 例えば MCMC では, 状態変数を 1 つずつサンプリングする方法 (single move sampler という) を用いるのが簡単であるが, この計算方法では得られる標本の自己相関が高くなり, 十分な精度の結果を得るために計算回数を非常に多く取らなければな

らない．もし状態変数を一括してサンプリングできれば (multi move sampler という) , 標本の自己相関は低くなるので少ない計算回数で精度の高い結果を得ることができる．このため、状態変数すべてを一括して同時にサンプリングする効率的な方法が Carter and Kohn(1994), Chib(1996), Kim and Nelson (1999) らにより提案されている．この点を踏まえて本稿では、マルコフ・スイッチング非対称性確率的ボラティリティ変動 (Markov Switching Asymmetric Stochastic Volatility, MSASV) モデルを ASV モデルの mixture sampler と、MS モデルの multi-move sampler を組み合わせて MCMC 法による推定を行い、得られた標本に基づいて事後分布に関する統計的推論を行うこととする．

また MS モデルにおいて最も重要な点の一つは、どのパラメータについて状態のスイッチ (切替) があるのかを同定することである．従来の研究は平均など特定のパラメータについて状態のスイッチがあると仮定し、その妥当性の診断をスイッチを考慮したモデルと考慮しないモデルの双方を推定した後に、周辺尤度を基準としたモデル選択を通じて行ってきた．そのような方法では様々な組み合わせのスイッチのあり方について多くのモデルをあてはめなくてはならない．例えば m 個のパラメータが 2 つの状態を取り得ると仮定すれば、スイッチのあり方のすべての組み合わせは 2^m 個になる．しかし、スイッチのあり方のすべての組み合わせについて、モデルの周辺尤度を計算することは現在では非常に計算負荷が高い．なぜならば複雑なモデルの周辺尤度の計算は、MCMC を利用した数値的な方法によることが多く、その代表的な計算方法である基本周辺尤度恒等式を利用した方法 (Chib(1995), Chib and Jeliazkov(2001,2005)) や Bridge sampling による方法 (Meng and Wong (1996)) は計算負荷が高いからである．

この問題に対して Frühwirth-Schnatter (2001a) は、スイッチのあり方をデータから探索し、比較すべきモデルの候補を絞り込むために無作為順列サンプリャー (random permutation sampler) を提案した．無作為順列サンプリャーは、意図的にパラメータの識別性をなくすことにより、有限のスイッチング・モデルや混合モデルの分布形状を効率的に求め、スイッチの有無に関する情報を、事後分布からの確率標本の散布図に基づいて得る探索的方法である．この方法により候補となるモデルを絞り込むことが可能となり、比較的少ない計算コストで最適なモデルを求めることができる．本稿では、先行研究でスイッチのあり方が特定のパラメータに限定されてきた MSASV モデルに対して、無作為順列サンプリャーを適用して探索的に最適なスイッチング・モデルを求めることとする、

以下ではまず第 2 節においてマルコフ・スイッチングのある ASV モデル (MSASV モデル) の導入を行い、パラメータの事後分布を導出する．そして事後分布からのサンプリングを行うために、MS モデルの multi-move sampler と ASV モデルの mixture sampler を組み合わせた MCMC 法について説明し、更にパラメータのスイッチの有無に関する情報を得るために無作為順列サンプリャーを導入する．第 3 節では、提案された方法を用いて MSASV モデルを TOPIX (東証株価指数) に対して適用し、日次及び週次の TOPIX 収益率の実証分析を行う．実証分析においてはまず無作為順列サンプリャーを行ってモデルを絞り込み、それらのモデルについて推定を行う．そして候補となるモデルにより推定された状態推移の事後確率の比較・解釈を行う．更に従来研究されてきた幾つかの SV モデルとのモデル比較を周辺尤度を用いて行う．最後に第 4 節で今後の課題について述べ、補論にアルゴリズムの詳細部分をまとめる．

2 MSASV モデルのベイズ分析

2.1 MSASV モデル

本稿では非対称性のある SV モデルに対して、パラメータが二つの状態、ボラティリティの水準の高い状態と低い状態を推移する MS モデルを考える。状態の数は必ずしも二つである必要は無く、三状態以上に対しても同様の方法で推定可能であるが、先行研究では状態数は二つで十分であるとされていることが多く、三状態以上の場合には解釈も難しくなるため、ここでは状態の個数は二つであると仮定して以下の説明及び実証分析を行う。

まず $\{y_t\}$ を資産収益率とし、 $\{S_t\}$ をボラティリティの高低の状態を表す離散的な変数 ($S_t = 1$ または $S_t = 0$) として、 $\{S_t\}$ が与えられたとき、以下のような非対称性のある確率的ボラティリティ変動モデル (ASV モデル) を考える。

$$y_t = \epsilon_t \exp(h_t/2), \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

$$h_{t+1} = \mu_{S_t} + \phi_{S_t} (h_t - \mu_{S_{t-1}}) + \eta_t, \quad t = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{S_t}), \quad \Sigma_{S_t} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{S_t} \sigma_{S_t} \\ \rho_{S_t} \sigma_{S_t} & \sigma_{S_t}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$h_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_{S_0}, \frac{\sigma_{S_0}^2}{1 - \phi_{S_0}^2}\right), \quad (2.4)$$

ただし、 $\mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma_{S_t})$ は平均 $\mathbf{0}$ 、共分散行列 Σ_{S_t} の二変量正規分布を表し、

$$\begin{aligned} \mu_{S_t} &\equiv \mu_0(1 - S_t) + \mu_1 S_t, \\ \phi_{S_t} &\equiv \phi_0(1 - S_t) + \phi_1 S_t, \quad |\phi_0| < 1, \quad |\phi_1| < 1, \\ \sigma_{S_t} &\equiv \sigma_0(1 - S_t) + \sigma_1 S_t, \\ \rho_{S_t} &\equiv \rho_0(1 - S_t) + \rho_1 S_t, \end{aligned}$$

とする。ここで $\{h_t\}$ はボラティリティの変動を表す潜在変数である。一方、 $\{S_{t-1}\}$ については以下のような一階の定常なマルコフ過程を仮定する。

$$\begin{aligned} \Pr(S_t = j \mid S_{t-1} = i) &= p_{ij}, \\ \Pr(S_0 = i) &= \frac{1 - p_{1-i,1-i}}{2 - p_{00} - p_{11}} \quad i, j \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

ただし $0 < p_{ij} < 1$, $p_{i0} + p_{i1} = 1$ ($i = 0, 1$) であり、初期値 S_0 には定常分布を仮定する。 $\{h_t\}$ の初期値 h_1 の分布については、一般的に $h_1 \sim \mathcal{N}(\mu_*, \sigma_*^2)$ として σ_0, σ_1 とは別に設定することもできるが、観測値から得られる初期値に関する情報は多くない。このため、本研究では式 (2.4) のように $S_i = S_0$, $i = 0, -1, -2, \dots$ としてデータ観測時点以前では状態の遷移は起きないと仮定したモデルの下での定常分布を用いることとした。

また、MS モデルではモデルの識別のために、パラメータに大小関係の制約を課している。パラメータが (μ_0, μ_1) のように一組だけである場合には制約の課し方は $\mu_0 < \mu_1$ と一通りしか存在しないが、今回のケースのように $\mu_j, \theta_j = (\phi_j, \sigma_j, \rho_j)', p_{jj}$, ($j = 0, 1$) と複数の組のパラ

メータが存在する場合には何通りも存在する．これまで多くの研究では特定のパラメータが状態 S_{t-1} に対応してスイッチすると仮定していたが，現実にはどのような制約の課し方が適切であるのかは明らかではない．このため，本稿ではパラメータに大小関係の制約を置くことをせず， $\mu_0 = \mu_1$ のように一部のパラメータが状態の推移に関わらず一定になる場合も許すこととする．そして後述する無作為順列サンプラー (Frühwirth-Schnatter(2001a)) を用いて制約をデータから探索的に得ることとし，周辺尤度を用いてその制約の妥当性を診断することとする．

2.2 事後分布とマルコフ連鎖モンテカルロ法

MSASV の尤度は解析的に評価が難しく，また上述のように制約式の課し方を探索的に求めるために，本稿ではベイズ的アプローチをとり順列サンプラーのステップを加えた MCMC 法によりパラメータの推定を行う． $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1)'$ ， $\boldsymbol{\theta} = (\theta'_0, \theta'_1)'$ ， $\boldsymbol{p} = (p_{00}, p_{11})'$ としてその事前確率密度関数を $\pi(\boldsymbol{\mu})$ ， $\pi(\boldsymbol{\theta})$ ， $\pi(\boldsymbol{p})$ とおくと，パラメータ及び潜在変数 $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)'$ ， $\boldsymbol{S} = (S_0, \dots, S_{n-1})'$ の同時事後確率密度関数は

$$\begin{aligned} & \pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{S} | \boldsymbol{y}) \\ & \propto \frac{\sqrt{1 - \phi_{S_0}^2}}{\sigma_{S_0}} \exp - \frac{(1 - \phi_{S_0}^2)(h_1 - \mu_{S_0})^2}{2\sigma_{S_0}^2} \times \prod_{t=1}^{n-1} |\Sigma_{S_t}|^{-\frac{1}{2}} \exp - \frac{1}{2} (h_t + \boldsymbol{v}'_t \Sigma_{S_t}^{-1} \boldsymbol{v}_t) \\ & \quad \times \exp - \frac{1}{2} [h_n + y_n^2 \exp(-h_n)] \\ & \quad \times \prod_{t=1}^{n-1} f(S_t | S_{t-1}, \boldsymbol{p}) f(S_0 | \boldsymbol{p}) \times \pi(\boldsymbol{\mu}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{p}), \\ & \quad \boldsymbol{v}'_t = (y_t \exp(-h_t/2), h_{t+1} - \mu_{S_t} - \phi_{S_t}(h_t - \mu_{S_{t-1}})) \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる．ただし $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ であり， $f(S_t | S_{t-1}, \boldsymbol{p}) = p_{S_{t-1}S_t}$ ， $f(S_0 | \boldsymbol{p}) = (1 - p_{1-S_0, 1-S_0}) / (2 - p_{00} - p_{11})$ である．ASV モデルに関連するパラメータは $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ であるが，これらのパラメータを事後分布からサンプリングする MCMC 法の中でも，最も効率的な方法として知られている Omori *et al.* (2007) による mixture sampler を用いてサンプリングを行う¹．具体的には，式 (2.1) の両辺を二乗対数をとると，

$$y_t^* = \log y_t = h_t + \log \epsilon_t^2, \quad (2.7)$$

ただし $y_t^* = \log y_t^2$ である²．ここで誤差項 $u_t = \log \epsilon_t^2$ は自由度 1 の対数カイ二乗分布に従うので，この誤差項の確率分布を既知の混合正規分布として，確率密度関数

$$g(u_t) = \sum_{i=1}^K p_i f(u_t | m_i, v_i^2),$$

¹ASV モデルのための効率的なサンプリング方法には mixture sampler 以外に Omori and Watanabe (2008) による Block Sampler があるが，mixture sampler に比べて拡張性が高いという特長がある反面，効率性の点では mixture sampler には及ばないためここでは mixture sampler を用いている．

²Kim *et al.* (1998), Omori *et al.* (2007) では，現実のデータ分析において小数点以下が切り捨てられて観測値が $y_t = 0$ となる場合も考慮して，非常に小さな正数 $c > 0$ を用いて $y_t^* = \log(y_t^2 + c)$ と計算している．

i	p_i	m_i	v_i^2	a_i	b_i
1	0.00609	1.92677	0.11265	1.01418	0.50710
2	0.04775	1.34744	0.17788	1.02248	0.51124
3	0.13057	0.73504	0.26768	1.03403	0.51701
4	0.20674	0.02266	0.40611	1.05207	0.52604
5	0.22715	-0.85173	0.62699	1.08153	0.54076
6	0.18842	-1.97278	0.98583	1.13114	0.56557
7	0.12047	-3.46788	1.57469	1.21754	0.60877
8	0.05591	-5.55246	2.54498	1.37454	0.68728
9	0.01575	-8.68384	4.16591	1.68327	0.84163
10	0.00115	-14.65000	7.33342	2.50097	1.25049

表 1: $\log \chi^2(1)$ 分布の正規分布による近似. Omori et al.(2007) より引用

を持つように近似する．ただし $f(u_t|m_i, v_i^2)$ は平均 m_i , 分散 v_i^2 の正規分布の確率密度関数, p_i は混合分布の重みを表し, $\sum_{i=1}^K p_i = 1$ である．この方法は Kim *et al.* (1998) によって $K = 7$ として SV モデルのために提案されたが, Omori *et al.* (2007) により $K = 10$ として近似が改善され, 更に ASV モデルのための拡張が行われた (詳細は Omori *et al.* (2007) 参照)． K 個の混合分布からの乱数は, 混合成分のインデックスを表す潜在変数 s_t を導入して (1) まず s_t をサンプリングし, 次に (2) 第 s_t 成分の正規分布から平均 m_{s_t} , 分散 $v_{s_t}^2$ の正規乱数を発生させて得ることができる．そこで式 (2.1)–(2.2) は近似によって, 以下のように線形ガウス状態空間モデルに表現される．

$$y_t^* = h_t + m_{s_t} + v_{s_t} z_t, \quad (2.8)$$

$$h_{t+1} = \mu_{S_t} + \phi_{S_t}(h_t - \mu_{S_{t-1}}) + A_t + B_t z_t + \sigma_{S_t} \sqrt{1 - \rho_{S_t}^2} z_t^*, \quad (2.9)$$

$$Pr\{s_t = i\} = p_i \quad (2.10)$$

ここで

$$(z_t, z_t^*)' \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, I),$$

$$A_t = d_t \rho_{S_t} \sigma_{S_t} a_{s_t} \exp(m_{s_t}/2),$$

$$B_t = d_t \rho_{S_t} \sigma_{S_t} b_{s_t} \exp(m_{s_t}/2),$$

$$d_t = \text{sign}(y_t) = I(\epsilon > 0) - I(\epsilon \leq 0),$$

であり, p_i, m_i, v_i, a_i, b_i は混合分布の近似の既知パラメータで表 1 で与えられる (Omori *et al.* (2007)). この近似を用いると事後確率密度関数は (2.6) の代わりに

$$\begin{aligned}
& \pi(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{S} | \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) \\
& \propto \frac{\sqrt{1 - \phi_{S_0}^2}}{\sigma_{S_0}} \exp - \frac{(1 - \phi_{S_0}^2)(h_1 - \mu_{S_0})^2}{2\sigma_{S_0}^2} \times \prod_{t=1}^{n-1} p_{s_t} v_{s_t}^{-1} \exp - \frac{(y_t^* - h_t - m_{s_t})^2}{2v_{s_t}^2} \\
& \quad \times \frac{1}{\sigma_{S_t} \sqrt{1 - \rho_{S_t}^2}} \exp - \frac{\{h_{t+1} - \mu_{S_t} - \phi_{S_t}(h_t - \mu_{S_{t-1}}) - A_t - B_t(y_t^* - h_t - m_{s_t})\}^2}{2\sigma_{S_t}^2(1 - \rho_{S_t}^2)} \\
& \quad \times p_{s_n} v_{s_n}^{-1} \exp - \frac{(y_n^* - h_n - m_{s_n})^2}{2v_{s_n}^2} \times \prod_{t=1}^{n-1} f(S_t | S_{t-1}) f(S_0) \times \pi(\boldsymbol{\mu}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{p}), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_n)$ となる．この事後分布から MCMC 法によるサンプリングを以下のステップで行う³．

1. $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}$ を初期化する．
2. $\boldsymbol{s} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
3. $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}) | \boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
 - (a) $\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
 - (b) $\boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
 - (c) $\boldsymbol{h} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
4. $\boldsymbol{S} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
5. $\boldsymbol{p} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{d}$ からサンプリングする．
6. 2 へ戻る．

以上のサンプリングは近似モデル (2.8)–(2.9) の事後分布からのサンプリングであるが, (2.1)–(2.2) との近似のずれは, 事後分布に関する期待値を計算する際に, 確率密度関数の重みを調整することによって修正を行うことができる (Omori *et al.* (2007)). サンプリングの詳細については補論 A を参照されたい.

2.3 順列サンプラー

無作為順列サンプラー (random permutation sampler) はもともと混合分布モデルのベイズ推定を行う場合に起こるラベル・スイッチング問題と呼ばれる問題のひとつの解決法として提案されたものである．ラベル・スイッチング問題とは混合分布の各成分にラベル (本稿のモデルでは $(\mu_0, \theta_0, p_{00})$ と $(\mu_1, \theta_1, p_{11})$ の 0 と 1) をつけておくときに, ラベルの入れ替えに対して不変な尤度関数を設定することでラベルの一意性がなくなる (パラメータの識別性がなくなる) 問題である．通常このような場合には何らかの識別性のためのパラメータ制約条件を課すことで対処

³MCMC に関して詳しくは, 大森 (2001), 中妻 (2003), Robert and Casella (2004), 伊庭 他 (2005), 和合 (2005) などを参照されたい．

されるが、不適切な制約をいれるとラベルが一意に決まらないばかりでなく、パラメータ推定にバイアスを生じさせてしまう (例えば Jasra et al. (2004), Frühwirth-Schnatter (2006) を参照) . そこで適切な識別性のための制約を探索的に見つけるために Frühwirth-Schnatter (2001) によって提案されたのが無作為順列サンプラーである .

無作為順列サンプラーはパラメータに制約のない事後分布から識別性を持たないパラメータをサンプリングする際に、追加的にランダムなラベル・スイッチ (ラベルの付け替え) を MCMC 法のステップにとして組み込むことにより、制約のない事後分布からのサンプルを得る効率的な方法である . マルコフ・スイッチングモデルも本質的には混合分布モデルであるため、MSASV モデルのマルコフ・スイッチング部分の適切なパラメータ制約を探索的に得るためにこの方法を用いる . 具体的には前節の MCMC アルゴリズムの Step 6 を以下のように変更すればよい .

6. ラベルの付け替えを行う .

- (a) ラベル $(l(0), l(1))$ を順列 $\{(0, 1), (1, 0)\}$ からランダムにサンプリングする .
- (b) $(\mu_i, \theta_i, p_{ii})$, $S_t = i$ ($t = 0, 1, \dots, n-1$), $i = 0, 1$ を $(\mu_{l(i)}, \theta_{l(i)}, p_{l(i)l(i)})$, $S_t = l(i)$ ($t = 0, 1, \dots, n-1$), のように (6a) でサンプリングしたラベルの順番で並べ替える .

7. 2. へ戻る .

このような並べ替えの手続きを入れた場合の $(\mu_i, \theta_i, p_{ii})$ の標本は、同一の周辺確率密度関数を持つことから、得られた標本をもとに描いた周辺確率密度関数が同様であるかによって収束判定の目安とすることができる .

2.4 モデル比較と周辺尤度

本稿では順列サンプラーによる MSASV モデルを現実のデータに適用してパラメータの推定を行うだけでなく、従来のモデルと比較してあてはまりがよいかどうかを、ベイズアプローチで最もよく用いられる周辺尤度を基準として用いてモデル選択を行う . 周辺尤度とはデータの周辺確率密度関数の実現値であり、そのモデルの下においてデータが観測されるもっともらしさを測る尺度である . $f(y|\theta)$ をデータの条件付確率密度関数、 $\pi(\theta)$ をパラメータ θ の事前確率密度関数、 $\pi(\theta|y)$ を事後確率密度関数、 $m(y)$ をデータの周辺確率密度関数とすると、確率密度関数の乗法定理から

$$\log m(y) = \log f(y|\theta) + \log \pi(\theta) - \log \pi(\theta|y) , \quad (2.12)$$

という恒等式が成り立つ . この式を用いて周辺尤度を計算する方法は、その精度が高いことが知られている (Chib (1995), Chib and Jeliazkov (2001) (2005)) . しかし、一般に混合分布モデルやスイッチング・モデルにおいては、尤度関数を評価するモデルに識別制約を入れなければ周辺尤度の推定値にバイアスが生じてしまう (Frühwirth-Schnatter (2004)) . このため、本稿ではまず、無作為順列サンプラーを用いて識別制約をデータから探索的に求め、次に識別制約の下で周辺尤度の推定値の計算を行うこととする .

式 (2.12) では対数尤度、事前確率密度、事後確率密度の値を求める必要があるが、事前確率密度は簡単に計算でき、また事後確率密度は Chib and Jeliazkov (2001) に従って計算する . 対

数尤度は、MSASV モデルでは解析的には求まらないので、モンテカルロ法に基づく粒子フィルタ (particle filter) を用いる必要があり、本稿では Pitt and Shephard (1999) により提案された補助粒子フィルタ (auxiliary particle filter) の考え方をを用いて尤度関数の計算を行う (詳細は補論 C を参照)。

3 TOPIX の日次・週次収益率の実証分析

3.1 データ

本節では TOPIX (東証株価指数) の日次・週次収益率を用いた実証分析を行う⁴。外国為替収益率等のように非対称性が観測されないデータとは異なり、非対称性の観測される株式収益率の分析では、リスク評価の観点からもそのモデルへの導入が重要であるため、本稿では非対称性を取り入れたモデルに基づいて分析を行う。

また、マルコフ・スイッチングモデルを用いる実証分析の先行研究のほとんどにおいては、どのパラメータがマルコフ過程に従ってスイッチするのかについて予め仮定されており、多くの場合にはモデルの定数項とされてきたが、その根拠は明らかではなかった。このため、我々はどのパラメータがスイッチするのかについても順列サンプラーを用いることでデータから探索し、そのモデルの妥当性についてモデル選択基準に基づいて包括的な評価を行う。その際に、パラメータのスイッチのまったく起こらないモデルについても含めて比較を行う。

以下では時点 t の TOPIX の収益率 y_t を、TOPIX の値 p_t の対数階差の 100 倍 (%単位)

$$y_t = (\ln p_t - \ln p_{t-1}) \times 100$$

と定義し、日次・週次収益率の 4 種類のデータを分析対象とする。日次データは 1970 年～2005 年の期間を、1980 年代後半～1990 年代初頭に見られたバブル景気の時期の前後で以下のように 3 期間に分割し、週次データは Shibata and Watanabe (2005) と同じ時期を用いることとする⁵。

1. 日次収益率.

第 I 期： 1970 年 1 月 6 日～1984 年 12 月 28 日。
第 II 期： 1985 年 1 月 4 日～1994 年 12 月 30 日。
第 III 期： 1995 年 1 月 4 日～2005 年 12 月 30 日。

2. 週次収益率. 1971 年 1 月 6 日～2004 年 8 月 25 日⁶。

TOPIX 収益率は期間により平均が 0 ではなくまた自己相関を持つことで知られているため、Shibata and Watanabe (2005) と同様に TOPIX 収益率に適切な次数の自己回帰 (AR) モデル

⁴本研究で行われた数値計算は、行列言語 Ox4.1 (Doonik, 2006) を用いて計算している。

⁵ただし Shibata and Watanabe (2005) では、平均 μ のみにスイッチのある MSSV モデルを推定しており、非対称性は考慮されていない。

⁶水曜日の終値ごとの収益率。ただし、年末年始の 2 週間をはずして、水曜日の取引がない場合には火曜日の終値を用い、火曜日も休みの場合は月曜日の終値を、どちらも休みの場合は、その週の木曜日の終値をとっている。そのため、Shibata and Watanabe(2004) のデータとは一致していない。

をあてはめ、得られるモデルの残差に対してマルコフ・スイッチングモデルを適用することとする。

	個数	平均	標準偏差	最大値	最小値	正值数
日次 (I)	4319	0.0372	0.6437	4.078	-7.762	2414
日次 (II)	2591	0.0205	1.1705	9.116	-15.810	1341
日次 (III)	2708	0.0022	1.2350	6.599	-6.574	1341
週次	1755	0.1157	2.408	13.406	-12.513	944

表 2: TOPIX 収益率 (%) の要約統計量

日次 (I):1970/1/6 ~ 1984/12/28, 日次 (II):1985/1/4 ~ 1994/12/30,
日次 (III):1995/1/4 ~ 2005/12/30, 週次:1971/1/6 ~ 2004/8/25.

表 2 は各データに関する要約統計量である。それぞれのデータに定数項と適切な次数の AR モデルをあてはめて BIC 基準によって選択し、その残差に対してマルコフ・スイッチングモデルを適用した。具体的には、日次第 I 期は定数項のある AR(2) モデルの残差を、日次第 II 期は定数項のない AR(2) モデルの残差を、日次第 III 期は定数項のない AR(1) モデルの残差を、週次データは平均からの偏差を分析の対象としている。

3.2 順列サンプラーによる識別制約の探索

先行研究では、モデルのパラメータのなかでどれがスイッチするのかについて検討されることがなく恣意的に決められることが多い。本稿では、まず順列サンプラーを取り入れたマルコフ連鎖モンテカルロ法を行うことで、データから適切な識別制約を求めることとする。推定に際してはモデルのパラメータには以下のような事前分布を設定した。

$$\begin{aligned} \mu_i &\sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \sigma_i^2 \sim \mathcal{IG}(2.5, 0.25), \quad \frac{\phi_i + 1}{2} \sim \mathcal{B}(1, 1), \\ \frac{\rho_i + 1}{2} &\sim \mathcal{B}(1, 1), \quad p_{ii} \sim \mathcal{B}(1, 1), \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

ただし $\mathcal{IG}(\cdot, \cdot)$ は逆ガンマ分布、 $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ はベータ分布を表すとする。これらの事前分布では σ_i^2 は平均 0.17, 標準偏差 0.24, p_{ii}, ϕ_i, ρ_i ($i = 0, 1$) は $(-1, 1)$ 上の一様分布となっている。

図 1 は、日次第 I 期のデータについて、順列サンプラーを用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法を行い、得られた標本の散布図と事後密度関数である。散布図において縦軸・横軸のパラメータが同じものについては、それぞれラベルの異なるもの (例えば μ_0 と μ_1) を用いて描いている。順列サンプラーによりパラメータのラベルの付け替えを行っているので、これらの対角ブロックに並んでいる散布図は 45 度線に関して対称になっている。点の塊が 2 つに分かれている図は状態が 0 か 1 によりパラメータが異なる値をとる傾向にあることを示している。

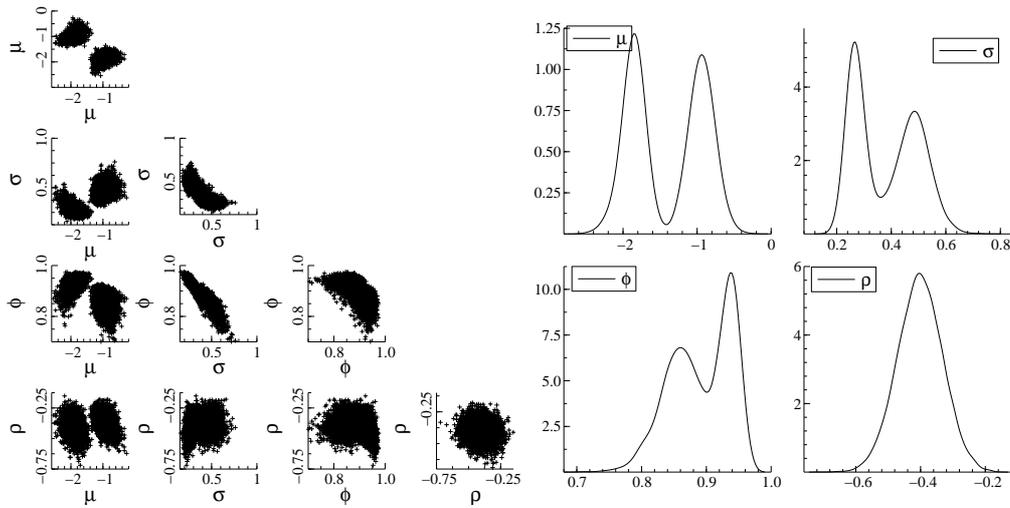


図 1: 日次 (I) : 順列サンプラーによる散布図 (左) と事後確率密度関数 (右)

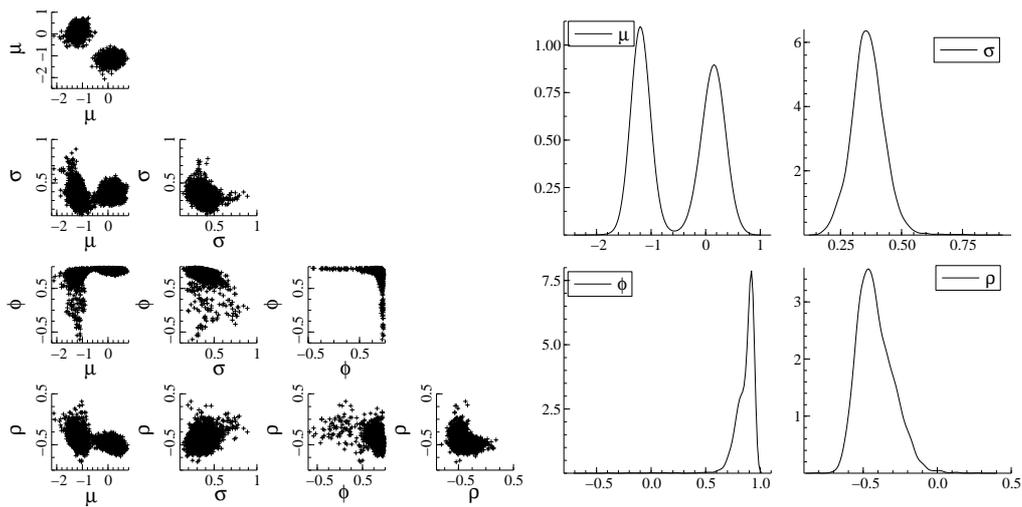


図 2: 日次 (II) : 順列サンプラーによる散布図 (左) と事後確率密度関数 (右)

例えば左上の (μ, μ) の散布図では 45 度線に関して対称にきれいに 2 つに分かれており, μ の小さい状態と大きい状態のあることが伺える. すぐ真下の (μ, σ) の散布図でも同様に 2 つの塊に分かれているが, μ が小さいときには σ も小さく, μ が大きいときには σ も大きいという, 2 つの状態があることを表している. これに対して (ρ, ρ) の散布図では 45 度線の周辺に塊が 1 つになっており, ρ の状態が 1 つしかないことを示唆している. またそれに対応して (μ, ρ) の散布図では塊は 2 つに分かれているものの, μ の大小にのみ対応して 2 つに分かれていて ρ の値には依存していない様子を見て取ることができる. 同様にして (σ, σ) と (ϕ, ϕ) の散布図からは, 多少塊が 2 つに分かれているものの, μ ほど明確な状態があるとはいえないことがわかる. その他にやや特徴的な図は (ϕ, σ) の散布図で, ϕ と σ の事後分布においては強い負の相関の存

在することがわかる。

各パラメータの周辺事後確率密度関数を見ると、 μ の事後確率密度関数が明確に分かれた2峰型の確率密度になっており、続いて σ, ϕ の事後確率密度関数がやや峰が連なる形の2峰型の確率密度になっている。これに対して ρ はほぼ単峰型の確率密度関数になっていて、散布図から得られる結果に対応している。以上から、日次第I期においては、 ρ はスイッチせずに (μ, σ, ϕ) がスイッチするモデルが候補として考えられるが、 μ だけがスイッチするモデルという可能性もある。

図2は日次第II期のデータについて得られた結果である。日次第I期のデータと同様に、 (μ, μ) の散布図では45度線に関して明確に2つの塊に分かれており、平均パラメータ μ にスイッチのあることを示している。 (ϕ, ϕ) の散布図も2つに分かれているが、 μ のそれと比較すると重なっている部分も大きく分かれ方ははっきりしていない。このことは ϕ と (μ, σ, ρ) の散布図においても同様で、その分かれ方はやや曖昧である。 (σ, σ) と (ρ, ρ) の散布図も塊が2つあるように見えるが、重なっており余りはっきりしているとはいえない。事後確率密度関数では、 μ だけが明らかに2峰型の確率密度関数であり、その他のパラメータで、 ϕ についてはやや峰らしき部分のあるものの、ほぼ単峰型のようにも見える。以上から、日次第II期においては、すべてのパラメータがスイッチするモデルが候補として考えられる。図3は日次第III期のデータについて得られた結果である。散布図では、どのパラメータも塊が2つあるが重なり合っており、日次第I・II期で (μ, μ) の散布図で2つの塊が明確に見られたのとは対照的である。事後確率密度関数の図では、 σ と ϕ に2峰型が表れており、 μ と ρ にもわずかではあるがその傾向を見て取ることができる。全体として状態の区別ははっきりしてはいないが、わずかながら異なる2つ状態間でスイッチが $(\mu, \sigma, \phi, \rho)$ に起きている可能性がある。

図4は週次データについて得られた結果であるが、日次III期の結果と同様に、散布図では、どのパラメータも塊が2つあるが重なり合っている。事後確率密度関数の図では、 μ と ϕ に2峰型が表れており、 σ と ρ にもわずかにその傾向がある。全体として状態の区別ははっきりしてはいないが、日次III期同様に異なる2つ状態間でスイッチが $(\mu, \sigma, \phi, \rho)$ に起きている可能性がある。

以上を踏まえて、以下では次の3つのマルコフ・スイッチングモデルを考慮することとする。

Model A: $(\mu, \sigma, \phi, \rho)$ がスイッチする ASV モデル。

Model B: (μ, σ, ϕ) がスイッチし、 ρ を固定した ASV モデル。

Model C: μ がスイッチし、 (σ, ϕ, ρ) を固定した ASV モデル。

本節の順列サンプラーの結果では、日次第I期データでは Model B、日次第II・III期及び週次データでは Model A が適切であると考えられるが、次節以降ではこれらのモデルについて推定をしてモデル選択の基準である周辺尤度を計算し、包括的なモデル比較を行う。その際には、実証分析で取り上げられることも多い μ のみスイッチする対称なSVモデル(MSSV)のほか、マルコフスイッチングの無いSVモデル(SV)、ASVモデル(ASV)、誤差項に t 分布を仮定したSVモデル(SVt)、ASVモデル(ASVt)についても比較を行う。

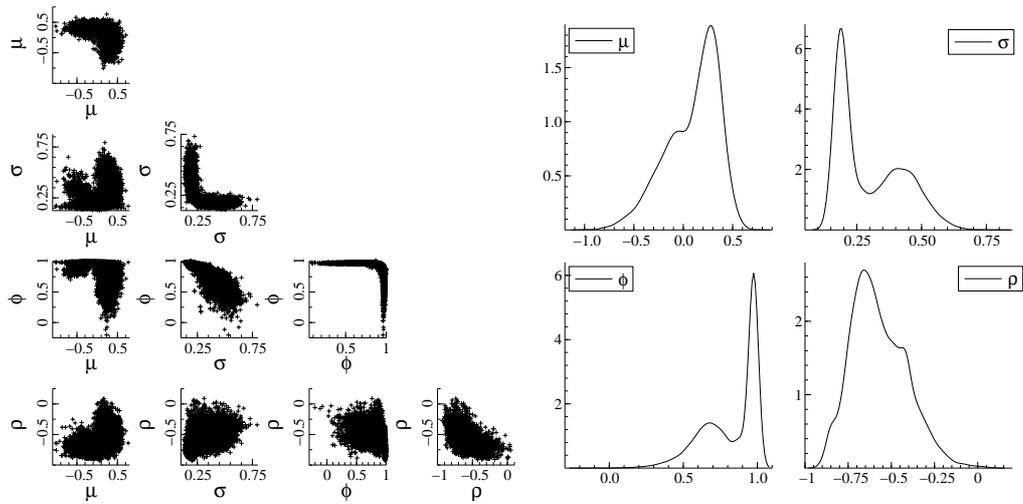


図 3: 日次 (III) : 順列サンプラーによる散布図 (左) と事後確率密度関数 (右)

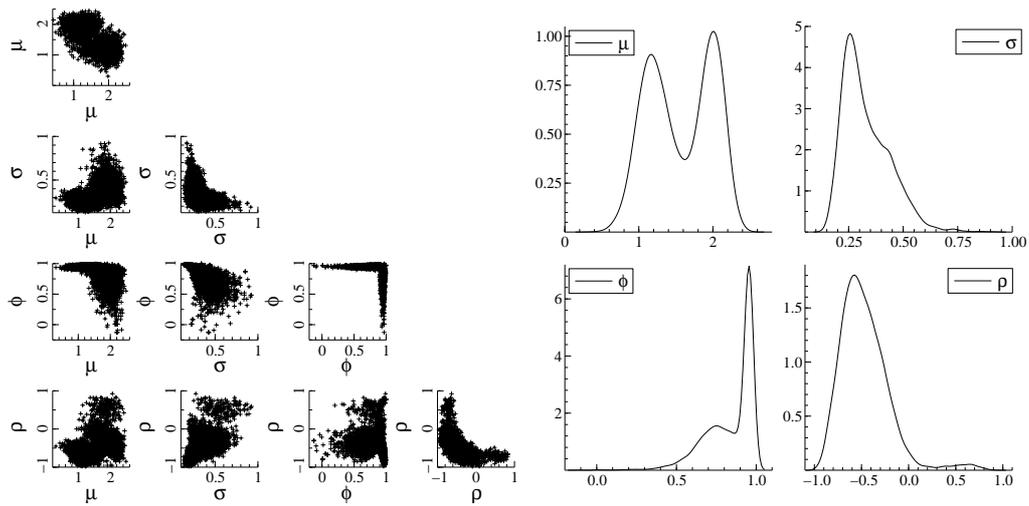


図 4: 週次: 順列サンプラーによる散布図 (左) と事後確率密度関数 (右)

3.3 推定結果

本節では前節の結果に基づいて選択された (状態に関する) 識別制約を課して Model A, Model B, Model C と MSSV についてマルコフ連鎖モンテカルロ法による推定を行った。またその際に μ 以外に σ もスイッチするモデルでは、順列サンプラーでの散布図の結果に基づいて、識別制約として $\mu_0 < \mu_1$ に加えて (μ, σ) の相関構造から想定される $\sigma_0 < \sigma_1$ という制約も入れることとした。これは $\sigma_0 < \sigma_1$ という制約を入れずに推定すると、時折標本経路が不安定になるものの、100 回程程度のサンプリングの後には安定的となるためである。つまり、この制約を満たさ

ないスイッチ構造のモデルが近い事後密度を持つために、一時的にそのモデルに移動するものの長く続かず、また元に戻ると考えられるのでこの移動に関して制約を加えた形になっている。

パラメータに関する事前分布は $(\mu_i, \sigma_i^2, \phi_i, \rho_i)$ については前節と同じ事前分布に $\mu_0 < \mu_1, \sigma_0 < \sigma_1$ という制約を加えたものを用いており、 p_{ii} については $B(5, 0.25)$ を仮定した。同じ状態にとどまる確率 p_{ii} はある程度高いと考えられることから、 p_{ii} の事前平均を 0.95、標準偏差が 0.09 としている。推定に際しては、初期値に依存する標本を稼働検査期間として棄てて、その後 5000 個を標本として採用した⁷。

3.3.1 パラメータ $(\mu, \sigma, \phi, \rho)$ の要約統計量と事後確率密度関数

表 3 は日次第 I 期のデータを用いて、Model B を推定した結果である。状態 0 は、ボラティリティの平均と分散が共に小さい状態に、状態 1 はボラティリティの平均と分散が共に大きい状態に対応している。図 1 の順列サンプラーの散布図において (μ, ϕ) と (σ, ϕ) の散布図に見られるように、ボラティリティの平均 μ と分散 σ が共に大きい不確実性の高いときには、ボラティリティの自己相関はわずかではあるが $\phi_0 > \phi_1$ と低下する傾向にある。また同じ状態を継続する確率は状態 0 及び 1 共に 0.998 と非常に高く、この傾向はすべての期間において同様である。

表 4 は日次第 II 期のデータを用いて、Model A を推定した結果である。状態 0 と状態 1 ではボラティリティの平均に差はあるものの、分散の差は小さい。またボラティリティの平均が大きい不確実性の高いときには、日次第 I 期の結果とは異なって $\phi_0 < \phi_1$ と自己相関は高くなる傾向にある。非対称性を表すパラメータ ρ は $\rho_1 < \rho_0 < 0$ となり、ボラティリティ水準の平均が高いときには、収益率の低下が非対称性を強めるという結果になっている。

表 5 は日次第 III 期のデータに関する結果であるが、全体的にボラティリティの水準が高くなっており、特に状態 1 の分散が大きい。日次第 I 期と同様にボラティリティの平均が高い時には $\phi_0 > \phi_1$ と自己相関は高くなる傾向にある。また非対称性を表すパラメータ ρ は $\rho_0 < \rho_1 < 0$ となり、日次第 II 期とは異なり、ボラティリティ水準の平均が低いときに、収益率の低下が非対称性を強めるという結果になっている。これらの結果は表 6 の週次データにおいても同様である。総合的に見ると、バブル期に該当する日次第 II 期はややその前後の期間と異なる傾向を示しているようである。

図 5 は表 5 に対応する事後密度関数の値である。順列サンプラーから得られた図 1 の事後密度関数と比較すると、 $\mu_0 < \mu_1, \sigma_0 < \sigma_1$ という制約を入れたことでそれぞれのパラメータが単峰型に分離されて推定されており、そのモードが表 5 の推定値に近い値となっている⁸。他の時期に関しても同様の結果が得られているが、ここでは省略することとする。

⁷収束判定を行うために Geweke (1992) の方法を用いている (推定結果の表の CD はその p 値である)。MCMC の標本系列の前半 10% と後半 50% の真の平均値を μ_1, μ_2 としたときの母平均の差の検定統計量であり、帰無仮説は $\mu_1 = \mu_2$ である。標本平均の分散の推定値にはスペクトル密度関数を用いており、その際にはバンド幅を標本自己相関が減衰するまでとしている。また非効率性因子は無相関の標本から計算する標本平均と同じ精度 (分散) を達成するのに何倍の標本数が必要であるかの尺度である。例えば伊庭 他 (2005) を参照。

⁸ただし、図 5 では図 1 とスケールをそろえるため、状態の事後確率を考慮してそれぞれの事後密度の面積が状態 0, 1 でそれぞれ 0.38 と 0.62 になるように便宜的に基準化してある。

	平均	(標準偏差)	95%信用区間	CD	非効率性因子
μ_0	-1.992	(0.197)	[-2.410, -1.649]	0.56	399.7
μ_1	-1.035	(0.154)	[-1.319, -0.712]	0.54	289.3
σ_0	0.309	(0.045)	[0.225, 0.381]	0.74	568.3
σ_1	0.430	(0.067)	[0.354, 0.572]	0.69	672.2
ϕ_0	0.915	(0.022)	[0.869, 0.953]	0.77	438.1
ϕ_1	0.875	(0.028)	[0.811, 0.910]	0.89	502.0
ρ	-0.382	(0.041)	[-0.470, -0.305]	0.10	141.0
p_{00}	0.998	(0.001)	[0.995, 1.000]	0.86	97.1
p_{11}	0.998	(0.002)	[0.992, 1.000]	0.79	421.3

表 3: 事後分布に関する推定結果. 日次 (I) Model B.

	平均	(標準偏差)	95%信用区間	CD	非効率性因子
μ_0	-1.196	(0.161)	[-1.481, -0.825]	0.15	60.7
μ_1	0.097	(0.205)	[-0.318, 0.509]	0.40	25.0
σ_0	0.354	(0.073)	[0.226, 0.515]	0.68	36.9
σ_1	0.368	(0.044)	[0.291, 0.466]	0.70	19.8
ϕ_0	0.814	(0.084)	[0.622, 0.942]	0.13	40.5
ϕ_1	0.922	(0.020)	[0.877, 0.955]	0.46	17.1
ρ_0	-0.326	(0.116)	[-0.556, -0.094]	0.98	21.4
ρ_1	-0.480	(0.071)	[-0.613, -0.334]	0.41	19.1
p_{00}	0.996	(0.003)	[0.987, 0.999]	0.30	17.5
p_{11}	0.997	(0.003)	[0.990, 0.999]	0.16	66.7

表 4: 事後分布に関する推定結果. 日次 (II) Model A.

	平均	(標準偏差)	95%信用区間	CD	非効率性因子
μ_0	-0.132	(0.197)	[-0.553, 0.196]	0.85	27.3
μ_1	0.244	(0.110)	[0.026, 0.460]	1.00	268.8
σ_0	0.181	(0.018)	[0.147, 0.219]	0.25	28.3
σ_1	0.457	(0.087)	[0.304, 0.650]	0.78	73.6
ϕ_0	0.978	(0.006)	[0.964, 0.989]	0.11	61.3
ϕ_1	0.664	(0.115)	[0.384, 0.843]	0.38	63.8
ρ_0	-0.696	(0.083)	[-0.841, -0.526]	0.79	77.5
ρ_1	-0.450	(0.101)	[-0.642, -0.241]	0.05	32.0
p_{00}	0.995	(0.003)	[0.989, 0.998]	0.07	45.3
p_{11}	0.991	(0.005)	[0.978, 0.998]	0.13	166.3

表 5: 事後分布に関する推定結果. 日次 (III) Model A.

	平均	(標準偏差)	95%信用区間	CD	非効率性因子
μ_0	0.957	(0.238)	[0.499, 1.440]	0.40	29.2
μ_1	1.940	(0.165)	[1.599, 2.249]	0.23	55.4
σ_0	0.265	(0.038)	[0.197, 0.344]	0.88	17.4
σ_1	0.419	(0.083)	[0.295, 0.611]	0.63	23.9
ϕ_0	0.954	(0.015)	[0.920, 0.977]	0.71	14.1
ϕ_1	0.734	(0.112)	[0.462, 0.893]	0.17	152.0
ρ_0	-0.529	(0.117)	[-0.745, -0.288]	0.69	28.8
ρ_1	-0.368	(0.127)	[-0.623, -0.139]	0.19	79.5
p_{00}	0.996	(0.003)	[0.988, 0.999]	0.56	112.5
p_{11}	0.994	(0.005)	[0.983, 0.999]	0.87	25.5

表 6: 事後分布に関する推定結果. 週次 Model A.

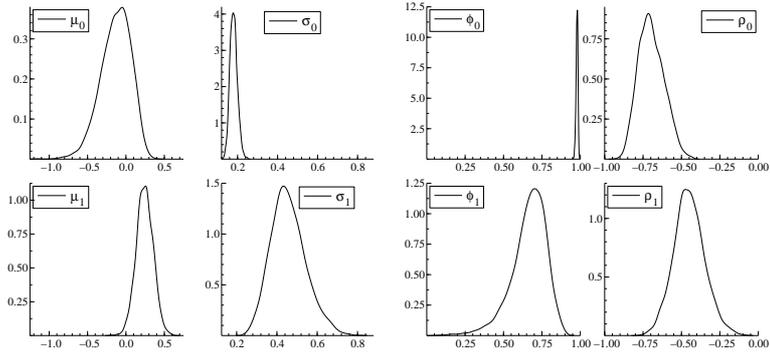


図 5: 事後確率密度関数. 日次 (III) Model A.

3.3.2 状態変数 S_t の事後確率関数

次に状態の事後確率 $\Pr(S_t = 1|y)$ をそれぞれの時期とモデルに対して比較を行い, Model A, Model B, Model C に加えて μ のみがスイッチする MSSV モデルについても推定した. 以下に見るように全体的な傾向として, Model A と Model B, そして Model C と MSSV モデルは同様な事後確率に関する結果を示している. また, 平均だけがスイッチするモデルに比べると, それ以外のパラメータもスイッチするモデルでは, 状態のスイッチがやや多くなっているようである. 図 6 は日次第 I 期の状態 1 の事後確率の推移をそれぞれのモデルで推定した結果である. Model A・Model B では, 他のモデルに比較して状態の推移が細かく起きており, 1971 年のスミソニアン合意から 1973 年の変動相場制への移行やオイルショック, 第 2 次オイルショック, 1983 年後半からの景気回復に対応すると思われる変動に対して, ボラティリティの平均水準の高い状態 ($S_t = 1$) が検出されている. これに対して他のモデルではやや状態の推移が緩やかになっている.

図 7 は日次第 II 期の状態 1 の事後確率の推移であるが, どのモデルでも同様な結果になっている. 1987 年 10 月のブラックマンデー後しばらくしてから, 1990 年のバブル崩壊前にかけてボラティリティの平均が小さい時期が見られており, また 1994 年にもやや同様な時期が現れている. 図 8 の日次第 III 期では Model C, MSSV モデルでは大まかに市場が高値で安定している 1996 年と 2004 年にボラティリティの水準が小さくなっていることを示す一方, Model A, Model B では状態のスイッチがより頻繁に捉えられている. 具体的には 1998 年 8 月のロシア危機後の金利引下げから IT バブル, 2003 年後半及び 2005 年後半の株価の急上昇の時期におけるボラティリティの上昇が明確に捉えられていることがわかる.

同様な相異は, 週次データに関する状態の事後確率を示す図 9 にも見られる. 平均だけのスイッチを考えた Model C・MSSV モデルではブラックマンデー以降もボラティリティの高水準がほぼ続いているとされているのに対し, Model A, Model B では一旦しばらくの間は低下した後 1998 年以降に再び高水準になったと推定されている. 日次と週次データの状態推移が必ずしも一致しないのは, 週次では明らかにはなりにくい状態の推移も, 日次ではより小さな状態の差異も捉えることができるためであると考えられる.

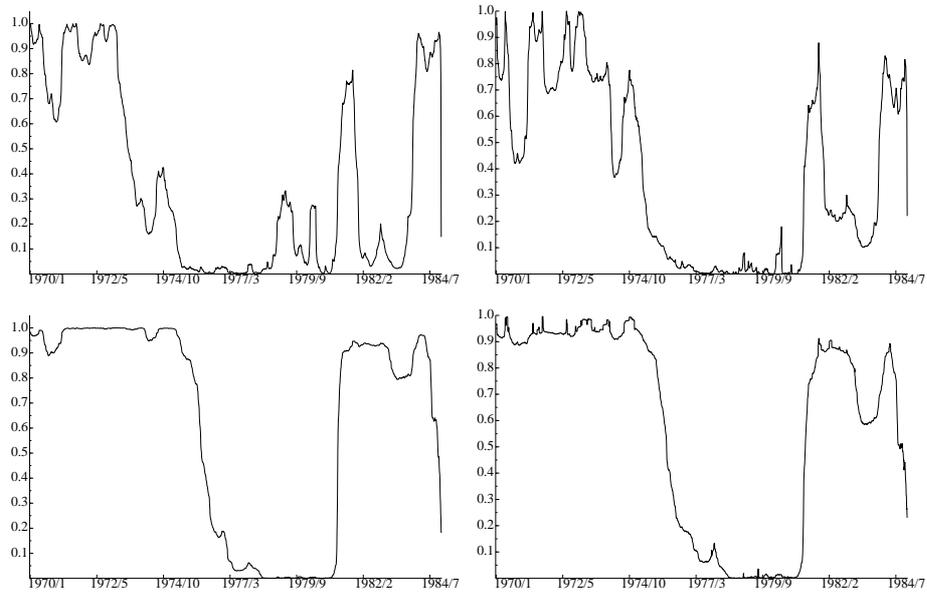


図 6: 日次 (I):状態 $S_t = 1$ の事後確率.
 Model A (上段左), Model B (上段右), Model C (下段左), MSSV (下段右).

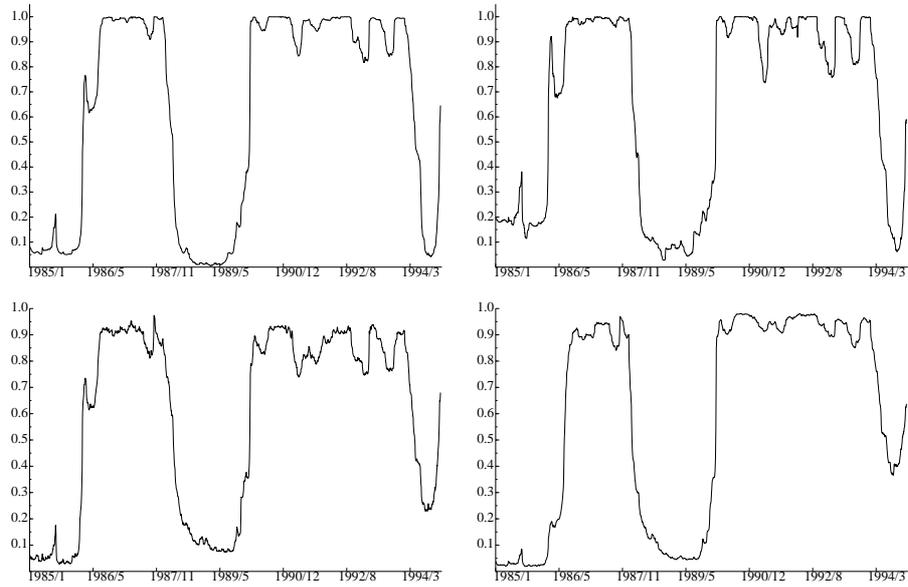


図 7: 日次 (II):状態 $S_t = 1$ の事後確率.
 Model A (上段左), Model B (上段右), Model C (下段左), MSSV (下段右).

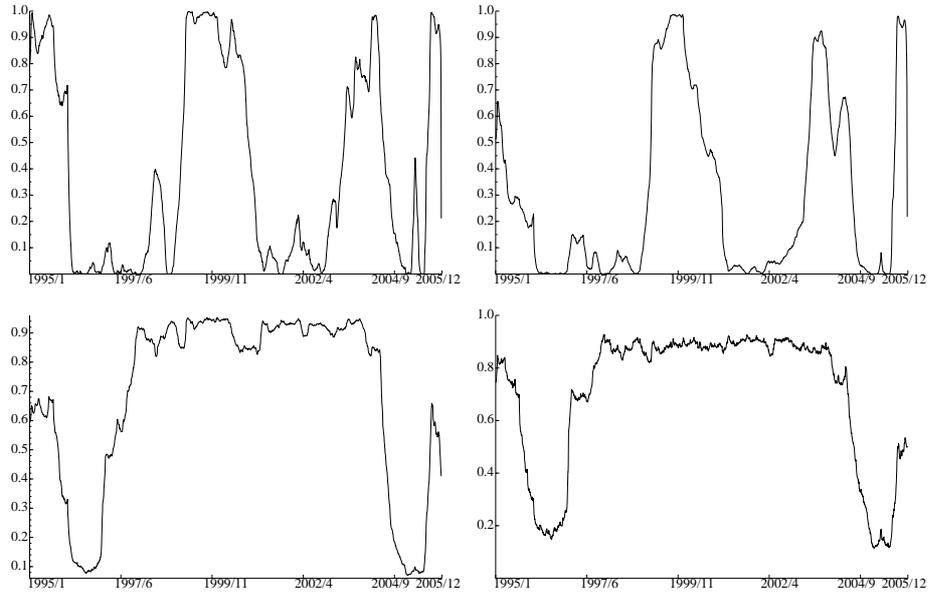


図 8: 日次 (III):状態 $S_t = 1$ の事後確率.
 Model A (上段左), Model B (上段右), Model C (下段左), MSSV (下段右).

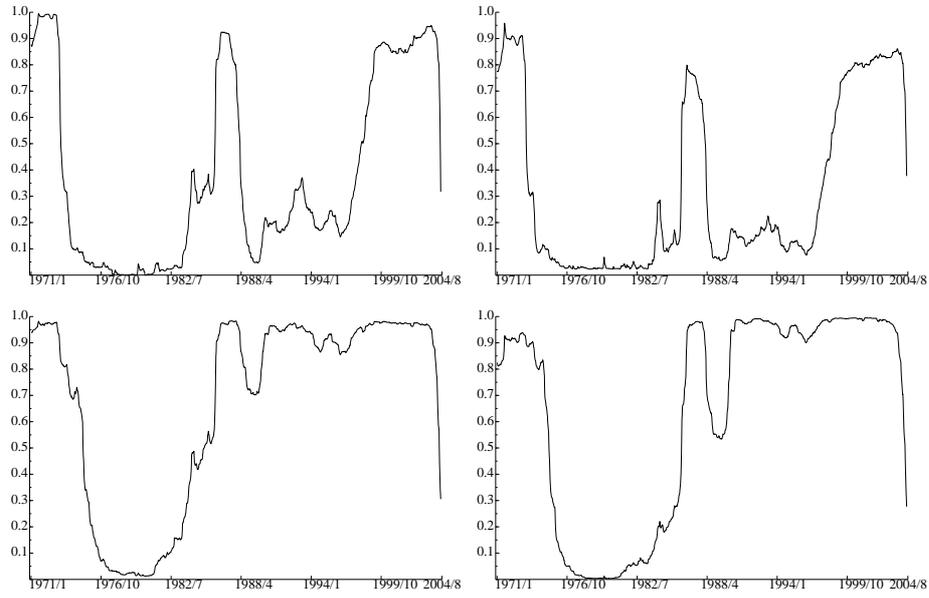


図 9: 週次:状態 $S_t = 1$ の事後確率.
 Model A (上段左), Model B (上段右), Model C (下段左), MSSV (下段右).

3.4 モデル比較

最後に第 2.4 節で説明した周辺尤度を用いて幾つかのマルコフ・スイッチングモデルとスイッチの無いモデルについて比較を行う．尤度関数を求めるための補助粒子フィルタでは粒子数を 10000 とし，10 回のモンテカルロ計算を繰り返して標準誤差を計算している．また事後密度の値の計算には Chib and Jeliazkov (2001, 2005) を用いて 5000 回のサンプリングを行い，その平均と標準誤差を求めている（標準誤差を求める際のバンド幅は 500 とした）．

	SV	SV _t	ASV	ASV _t
日次 (I)	-3284.96 (0.88)	-3286.93 (1.52)	-3254.99 (1.49)	-3256.43 (0.93)
日次 (II)	-3363.79 (0.70)	-3360.75 (1.41)	-3335.41 (0.63)	-3332.87 (1.17)
日次 (III)	-4221.52 (0.32)	-4219.77 (0.51)	-4200.65 (0.16)	-4199.18 (0.46)
週次	-3793.62 (0.34)	-3791.11 (0.40)	-3782.86 (0.34)	-3780.84 (0.82)

表 7: 周辺尤度 (標準誤差): スイッチのないモデル.

	Model A	Model B	Model C	MSSV
日次 (I)	-3246.45 (1.77)	-3245.29 (1.60)	-3244.43 (2.30)	-3274.39 (3.38)
日次 (II)	-3329.12 (1.03)	-3327.35 (1.97)	-3332.94 (1.85)	-3362.18 (1.82)
日次 (III)	-4201.39 (0.72)	-4199.18 (1.40)	-4201.24 (0.58)	-4201.40 (0.45)
週次	-3781.68 (0.64)	-3782.33 (0.47)	-3782.45 (0.58)	-3793.75 (0.63)

表 8: 周辺尤度 (標準誤差): マルコフ・スイッチングモデル.

まず表 7 はスイッチのないモデルの周辺尤度の推定値であり，SV_t, ASV_t は SV, ASV モデルの観測誤差に t 分布を導入したモデルを示している（推定法の詳細は Omori et al. (2007) を参照）．いずれに期においても非対称性のある SV モデル (ASV, ASV_t) のあてはまりがよいが，日次第 I 期を除いて t 分布を考慮した ASV_t モデルの周辺尤度がやや高くなっている．

表 8 はスイッチングを取り入れたモデルの周辺尤度である．日次第 I 期では，標準誤差を考慮すると Model A, B, C の周辺尤度が同程度高くなっており，非対称性を考慮しない単純な MSSV モデルに比較するとあてはまりがよい．またマルコフ・スイッチングのない ASV モデルに比べても周辺尤度が高く，この時期における日次収益率の変動をよく捉えている．日次第 II 期でも同様であるが，Model A と Model B のあてはまりがより良いといえることができる．これに対して日次第 III 期ではどのマルコフ・スイッチングモデルには余り差異が無く，またスイッチの無い ASV, ASV_t モデルともほぼ同程度のアてはまりである．

一方，週次データでは非対称性を考慮したマルコフ・スイッチングモデルが同じ程度に良いが，スイッチの無い ASV_t モデルの方がより良い周辺尤度の値を示している．以上より，日次データでは非対称性を考慮したマルコフ・スイッチングモデルはいずれもあてはまりがよいが，時期によっては他のモデルも同程度のアてはまりを示しており，週次データでは非対称性を考慮する限りにおいて簡潔である ASV_t モデルのあてはまりがよいといえることができる．

4 結論と今後の課題

本稿では、非対称性を取り入れた確率的ボラティリティ変動モデルについて、状態数が2であるマルコフ・スイッチングモデルを平均以外のパラメータにも許容するモデルを考えて、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた推定法を提案した。さらにモデル比較のために候補となるモデル数を適切に絞り込むために、順列サンプラーを用いた。また、TOPIX 収益率の日次・週次データを用いた実証分析を行い、マルコフ・スイッチングモデルの中では順列サンプラーに基づいて選ばれたスイッチ構造を持つモデルが最も良いモデルか、または最も良いモデルとほぼ同等であるという結果が得られた。しかし近年のデータでは、マルコフ・スイッチングモデルは t 分布を用いるパラメータ節約的なスイッチの無い ASV_t モデルと比較してもあまりあてはまりのよさは変わらないという結論も同時に得られた。

今後は近年のデータにおけるこうした変化がなぜ生じるのかについて研究を深めてゆく必要がある。例えば Maheu and McCurdy (2000) などでは株式市場の収益率の平均が高くときボラティリティが低く、平均が低いときボラティリティが高いというスイッチのモデリングを行っている。今回、非対称性で各時点の収益率とボラティリティの負の相関をモデル化したが、非対称性を考慮する代わりに収益率の平均のスイッチを考慮するモデルも順列サンプラーや周辺尤度を用いて比較・検討することも考えられる。また本研究のマルコフ・スイッチングモデルでも捉えられた 2004 年 9 月ごろのボラティリティの急激な低下はリアライズドボラティリティ (Realized Volatility) においても現れていることが知られており、Takahashi, Omori and Watanabe (2007) で提案された確率的ボラティリティ変動モデルとリアライズドボラティリティの同時モデリングに対してマルコフ・スイッチングモデルを応用することも今後の課題である。

補論

A 事後分布からのサンプリング方法

A.1 s のサンプリング

他のパラメータを条件としたとき, s_t の分布は $s_t = 1, \dots, 10$ 上での離散確率分布となるので, 条件付事後確率分布からのサンプリングは容易に行うことができる. 具体的には基準化されていない s_t の事後確率密度を $g(s_t)$ とおくと, 条件付事後確率密度を $Pr(s_t = i|\cdot) = g(i) / \sum_{j=1}^{10} g(j)$ と求めて離散確率分布からのサンプリングを行えばよい.

A.2 (μ, θ, h) のサンプリング

de Jong (1991) による拡大カルマン・フィルタ (augmented Kalman filter) を用いると, (μ, θ, h) の条件付事後確率密度関数は以下のように書くことができる.

$$\pi(\theta|S, s, \mathbf{y}^*, d) \propto f(\mathbf{y}^*|\theta, S, s, d)\pi(\theta), \quad (\text{A.1})$$

$$\pi(\mu, h|\theta, S, s, \mathbf{y}^*, d) \propto \pi(h|\mu, \theta, S, s, \mathbf{y}^*, d)\pi(\mu|\theta, S, s, \mathbf{y}^*, d), \quad (\text{A.2})$$

ここで $f(\mathbf{y}^*|\theta, S, s, d)$ は近似モデルの尤度関数で μ と h に関して積分されており, また $\pi(\mu|\theta, S, s, \mathbf{y}^*, d)$ は, h に関して積分した周辺確率密度関数である. これにより, integration sampler と呼ばれる効率の良いサンプリングを行うことができる (補論 B 参照).

Step 3a の θ のサンプリングにおいては, 条件付確率密度関数 (A.1) をもとに, MH アルゴリズムを行えばよい. 提案分布としては例えば, $\hat{\theta}$ を条件付事後密度のモード (またはモードの近似値) として, パラメータの定義域で切断された正規分布 $\mathcal{N}(\theta^*, \Sigma^*)$

$$\theta^* = \hat{\theta} + \Sigma^* \frac{\partial \log \pi(\theta|S, s, \mathbf{y}^*, d)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\Sigma^* = \left[-\frac{\partial^2 \log \pi(\theta|S, s, \mathbf{y}^*, d)}{\partial \theta \partial \theta'} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \right]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

を用いればよい. MH アルゴリズムにおける採択率が低い場合には Acceptance-Rejection Metropolis-Hasting (AR-MH) アルゴリズム (Tierney(1994), 和合 (2005) などを参照のこと) を用いてもよい.

Step 3b においては, μ を de Jong (1991) の拡大カルマン・フィルタを用いて正規分布からサンプリングを行う (補論 B 参照). Step 3c の h のサンプリングは de Jong and Shephard (1995) により提案されたシミュレーション・スムーザ (simulation smoother) を用いる (補論 B 参照).

A.3 S のサンプリング

状態 S のサンプリングには以下の離散フィルタとシミュレーション・スムーザを用いる (例えば Chib (1996)) . まず離散フィルタでは $t = 1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$f(S_t | I_t, \vartheta) = \frac{\sum_{S_{t-1}} f(h_{t+1} | S_t, S_{t-1}, I_t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_t | S_{t-1}, \boldsymbol{p}) f(S_{t-1} | I_{t-1}, \vartheta)}{\sum_{S_t} \sum_{S_{t-1}} f(h_{t+1} | S_t, S_{t-1}, I_t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_t | S_{t-1}, \boldsymbol{p}) f(S_{t-1} | I_{t-1}, \vartheta)} \quad (\text{A.5})$$

ただし $\vartheta = (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$, $I_t = \{y_t^*, h_t, d_t, s_t\}_{s=1}^t$ 及び

$$\begin{aligned} f(h_{t+1} | S_t, S_{t-1}, I_t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{S_t}^2)\sigma_{S_t}}} \times \\ &\exp - \frac{\{h_{t+1} - \mu_{S_t} - \phi_{S_t}(h_t - \mu_{S_{t-1}}) - A_t - B_t(y_t^* - h_t - m_{s_t})\}^2}{2\sigma_{S_t}^2(1-\rho_{S_t}^2)}, \quad t \geq 2, \\ f(h_1 | S_0, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\sqrt{1-\phi_{S_0}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{S_0}} \exp - \frac{(1-\phi_{S_0}^2)(h_1 - \mu_{S_0})^2}{2\sigma_{S_0}^2} \end{aligned}$$

を逐次的に計算する. 次にシミュレーション・スムーザでは,

$$f(S_t | S_{t+1}, \dots, S_{n-1}, I_n, \vartheta) \propto f(h_{t+2} | S_{t+1}, S_t, I_{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_{t+1} | S_t, \boldsymbol{p}) f(S_t | I_t, \vartheta),$$

であることを用いて $t = n-1, \dots, 1, 0$ に対して

$$\begin{aligned} &f(S_t | S_{t+1}, \dots, S_{n-1}, I_n, \vartheta) \\ &= f(S_t | S_{t+1}, I_n, \vartheta) \\ &= \frac{f(h_{t+2} | S_{t+1}, S_t, I_{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_{t+1} | S_t, \boldsymbol{p}) f(S_t | I_t, \vartheta)}{\sum_{S_t} f(h_{t+2} | S_{t+1}, S_t, I_{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_{t+1} | S_t, \boldsymbol{p}) f(S_t | I_t, \vartheta)} \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

と計算できるので, 順に $S_{n-1} | I_n, \vartheta$, $S_{n-2} | (S_{n-1}, I_n, \vartheta)$, \dots , $S_0 | (S_1, \dots, S_{n-1}, I_n, \vartheta)$ とサンプリングして S をその同時事後分布から発生させればよい.

A.4 p のサンプリング

本稿では p_{ii} の事前分布としてベータ分布 $p_{ii} \sim \mathcal{B}(a_{i0}, b_{i0})$ を仮定する. このとき, n_{ij} を $S_{t-1} = i$ かつ $S_t = j$ となった回数とすれば, p_{ii} の事後分布は,

$$\pi(p_{ii} | \boldsymbol{S}) \propto p_{ii}^{a_{i0} + n_{ii} - 1} (1 - p_{ii})^{b_{i0} + n_{ij} - 1} \frac{1 - p_{1-S_0, 1-S_0}}{2 - p_{00} - p_{11}},$$

となるので, ベータ分布 $p_{ii} \sim \mathcal{B}(a_{i0} + n_{ii}, b_{i0} + n_{ij})$ を提案分布として MH アルゴリズムを行えばよい.

B 拡大カルマン・フィルタとシミュレーション・スムーザ

B.1 カルマン・フィルタ

y_t を観測値, α_t を状態変数として, 以下のような線形ガウシアン状態空間モデルを考える.

$$y_t = X_t\beta + Z_t\alpha_t + G_tu_t \quad (t = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1} &= W_t\beta + T_t\alpha_t + H_tu_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ \alpha_0 &= 0, u_t \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, I), \quad t = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

カルマン・フィルタは以下のような逐次計算を行う (例えば de Jong (1991), de Jong and Shephard (1995) 参照).

$$\begin{aligned} e_t &= y_t - X_t\beta - Z_t a_t, \quad D_t = Z_t P_t Z_t' + G_t G_t', \quad K_t = (T_t P_t Z_t' + H_t G_t') D_t^{-1} \quad (\text{B.3}) \\ \alpha_{t+1} &= W_t\beta + T_t a_t + K_t e_t, \quad P_{t+1} = T_t P_t L_t' + H_t J_t' \\ L_t &= T_t - K_t Z_t, \quad J_t = H_t - K_t G_t \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ただし $a_1 = W_0\beta$, $P_1 = H_0 H_0'$, $G_0 = 0$ である. このとき対数尤度関数は

$$\log f(y^n | \beta, \theta) = -\frac{nm_y}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log |D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n e_t' D_t^{-1} e_t \quad (\text{B.5})$$

となる. ただし $y^t = (y_1, \dots, y_t)$, m_y は y の次元である.

B.2 拡大カルマン・フィルタ

今, β が正規分布に従う確率変数と確定的な値の和で表せると仮定し, $\beta = b + B\mu$, $\mu \sim N(m_0, M_0)$ と置く. b, B はそれぞれ適切に定義された既知のベクトルと行列である. 拡大カルマン・フィルタはカルマン・フィルタに次のステップを追加することで得られる.

$$\begin{aligned} f_t &= y_t - X_t b - Z_t a_t^*, \quad a_{t+1}^* = W_t b + T_t a_t^* + K_t f_t \\ F_t &= X_t B - Z_t A_t^*, \quad A_{t+1}^* = -W_t B + T_t A_t^* + K_t F_t \\ q_{t+1} &= q_t + F_t' D_t^{-1} f_t, \quad Q_{t+1} = Q_t + F_t' D_t^{-1} F_t. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

ここで $a_1^* = W_0 b$, $A_1^* = -W_0 B$, $q_1 = M_0^{-1} m_0$, $Q_1 = M_0^{-1}$ である. このとき $e_t = f_t - F_t \mu$, $a_t = a_t^* - A_t^* \mu$ が成立しているので, 対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log(y^n | \mu, \theta) &= -\frac{nm_y}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log |D_t| \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=1}^n f_t' D_t^{-1} f_t - 2 \left(\sum_{t=1}^n F_t' D_t^{-1} f_t \right)' \mu + \mu' \left(\sum_{t=1}^n F_t' D_t^{-1} F_t \right) \mu \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

さらに μ の事後分布は $\mu \sim \mathcal{N}(Q_{n+1}^{-1}q_{n+1}, Q_{n+1}^{-1})$ となるので, μ に関して積分した対数尤度関数は

$$\begin{aligned} \log f(y^n|\theta) &= \log f(y^n|\mu, \theta) + \log \pi(\mu|\theta) - \log \pi(\mu|y^n, \theta) \\ &= -\frac{nm_y}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \log |D_t| - \frac{1}{2} \log |M_0| - \frac{1}{2} \log |Q_{n+1}| \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{t=1}^n f_t' D_t^{-1} f_t + m_0' M_0^{-1} m_0 - q_{n+1}' Q_{n+1}^{-1} q_{n+1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる. 式 (B.8) を用いて MH もしくは AR-MH アルゴリズムでサンプリングする手法を integration sampler という. MSASV モデルでは, 観測値を y_t^* として

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \end{pmatrix}, \\ X_t &= (m_{s_t}, 0, 0, 0), \quad Z_t = 1, \quad \alpha_t = h_t, \quad G_t = (v_{s_t}, 0), \\ W_t &= (0, d_t \rho_{S_t} \sigma_{S_t} a_{s_t} \exp(m_{s_t}/2), \{(1 - S_t) - \phi_{S_t}(1 - S_{t-1})\}, \{S_t - \phi_{S_t} S_{t-1}\}), \\ T_t &= \phi_{S_t}, \quad H_t = (d_t \rho_{S_t} \sigma_{S_t} b_{s_t} v_{s_t} \exp(m_{s_t}/2), \sigma_{S_t} \sqrt{1 - \rho_{S_t}^2}), \\ W_0 &= (0, 0, 1 - S_0, S_0), \quad H_0 = (0, \sigma_{S_0} / \sqrt{1 - \phi_{S_0}^2}) \end{aligned}$$

とすればよい.

B.3 シミュレーション・スムーザ

シミュレーション・スムーザは補論 B.1 のモデルで, $\alpha|y^n$ を得るのに誤差項の事後分布 $u|y^n$ から標本 (u_0, \dots, u_n) を得て, その標本から $\alpha_0 \dots \alpha_n$ の標本を求める効率的なサンプリング方法がある. まずカルマン・フィルタを計算し $\{e_t, D_t, K_t\}_{t=1}^n$ を保存しておく. $U_n = 0, r_n = 0, G_0 = 0$ として $t = n, \dots, 0$ まで以下の計算を繰り返す.

$$\begin{aligned} C_t &= F_t(I - G_t' D_t^{-1} G_t - J_t' U_t J_t) F_t', \quad \epsilon_t \sim (0, C_t), \quad V_t = F_t(G_t' D_t^{-1} Z_t + J_t' U_t L_t) \\ r_{t-1} &= Z_t' D_t^{-1} e_t + L_t' r_t - V_t' C_t^{-1} \epsilon_t, \quad U_{t-1} = Z_t' D_t^{-1} Z_t + L_t' U_t L_t + V_t' C_t^{-1} V_t \\ \eta_t &= F_t(G_t' D_t^{-1} e_t + J_t' r_t) + \epsilon_t \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ここで $t = 0$ のときは U_{-1}, r_{-1} の計算を行う必要はない. $F_t = H_t$ として η_t を求めて $\alpha_{t+1} = W_t \beta + T_t \alpha_t + \eta_t$ ($t = 1, 2, \dots, n-1$) とすればよい.

C 補助粒子フィルタ

まず，モデル (2.1), (2.2) を密度関数の形で以下のように変形する．

$$\begin{aligned} f(y_t|h_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}h_t - \frac{1}{2}y_t^2 \exp(-h_t)\right\} \\ f(h_{t+1}|y_t, h_t, S_t, S_{t-1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho_{S_t}^2)\sigma_{S_t}}} \exp\left\{-\frac{(h_{t+1}-m_{t+1})^2}{2(1-\rho_{S_t}^2)\sigma_{S_t}^2}\right\} \end{aligned}$$

ここで $m_{t+1} = \mu_{S_t} + \phi_{S_t}(h_t - \mu_{S_{t-1}}) + \rho_{S_t}\sigma_{S_t} \exp(-h_t/2)y_t$ である．

今， $f(h_t, S_{t-1}|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ を $(y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ が与えられたときの (h_t, S_{t-1}) の条件付確率密度関数とし，その確率分布からの標本 (粒子) が， (h_t^i, S_{t-1}^i) ($i = 1, \dots, I$) の I 個得られているとする．また $\hat{f}(h_t, S_{t-1}|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ は $f(h_t, S_{t-1}|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ を離散的に近似した確率関数とする．

このとき， $(y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ が与えられたときの $(h_{t+1}, S_t, h_t, S_{t-1})$ の条件付同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} &f((h_{t+1}, S_t), (h_t, S_{t-1})|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \\ &\propto f(y_{t+1}|h_{t+1})f(h_{t+1}|y_t, h_t, S_t, S_{t-1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})f(S_t|S_{t-1}, \boldsymbol{p})f(h_t, S_{t-1}|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

となることから，この条件付同時確率密度関数を持つ確率分布からの標本を重点サンプリングによって行うために重点密度関数を以下のように求める．

$$\begin{aligned} &g((h_{t+1}, S_t), (h_t, S_{t-1})|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \\ &\propto f(y_{t+1}|m_{t+1}^i)f(h_{t+1}|y_t, h_t^i, S_t^i, S_{t-1}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})f(S_t^i|S_{t-1}^i, \boldsymbol{p})\hat{f}(h_t^i, S_{t-1}^i|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \\ &\propto f(h_{t+1}|y^t, h_t^i, S_t^i, S_{t-1}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})f(S_t^i|S_{t-1}^i, \boldsymbol{p})g(h_t^i, S_{t-1}^i|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ただし，

$$\begin{aligned} g(h_t^i, S_{t-1}^i|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) &= \frac{f(y_{t+1}|m_{t+1}^i)\hat{f}(h_t^i, S_{t-1}^i|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}{\sum_{i=1}^I f(y_{t+1}|m_{t+1}^i)\hat{f}(h_t^i, S_{t-1}^i|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}, \\ f(y_{t+1}|m_{t+1}^i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}m_{t+1}^i - \frac{1}{2}y_{t+1}^2 \exp(-m_{t+1}^i)\right\}, \\ m_{t+1}^i &= \mu_{\bar{S}_t^i} + \phi_{\bar{S}_t^i}(h_t^i - \mu_{S_{t-1}^i}) + \rho_{\bar{S}_t^i}\sigma_{\bar{S}_t^i} \exp(-h_t^i/2)y_t, \\ \bar{S}_t^i &= \arg \max_{j \in \{0,1\}} \Pr(S_t = j|S_{t-1} = S_{t-1}^i, \boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

この重点関数を用いて以下のような補助粒子フィルタを行う．

1. $t = 1$ とする．

- (a) S_0^i ($i = 1, \dots, I$) を定常分布 $\Pr\{S_0 = j\} = (1 - p_{1-j,1-j})/(2 - p_{00} - p_{11})$ ($j = 0, 1$) からサンプリングする．
- (b) h_1^i ($i = 1, \dots, I$) を $f(h_1^i|S_0^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ からサンプリングする (ただし $f(h_1^i|S_0^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ は正規分布 $\mathcal{N}(\mu_{S_0^i}, \sigma_{S_0^i}^2 / (1 - \phi_{S_0^i}^2))$ の確率密度関数)．

- (c) $w_i = f(y_1|h_1^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ を計算し, $\bar{w}_1 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_i$ を保存する .
- (d) $\hat{f}(h_1^i, S_0^i|y_1, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) = \pi_1^i = w_i / \sum_{j=1}^I w_j$ ($i = 1, \dots, I$) とする .
2. 各 i に対して以下のように $\{(h_{t+1}^i, S_t^i), (h_t^i, S_{t-1}^i)\}$ ($i = 1, \dots, I$) を重点関数 $g((h_{t+1}, S_t), (h_t, S_{t-1})|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ からサンプリングする .
- (a) $\bar{S}_t^i = \arg \max_{j \in \{0,1\}} \Pr(S_t = j | S_{t-1} = S_{t-1}^i, \boldsymbol{p})$ ($i = 1, \dots, I$) を求める .
- (b) $m_{t+1}^i = \mu_{\bar{S}_t^i} + \phi_{\bar{S}_t^i} (h_t^i - \mu_{S_{t-1}^i}) + \rho_{\bar{S}_t^i} \sigma_{\bar{S}_t^i} \exp(-h_t^i/2) y_t$ ($i = 1, \dots, I$) を求める .
- (c) (h_t^i, S_{t-1}^i) ($i = 1, \dots, I$) を $g(h_t^i, S_{t-1}^i|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ ($i = 1, \dots, I$) からサンプリングする .
- (d) S_t^i を $f(S_t^i|S_{t-1}^i, \boldsymbol{p})$ からサンプリングする .
- (e) h_{t+1}^i を $f(h_{t+1}|y^t, h_t^i, S_t^i, S_{t-1}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$ からサンプリングする .

次に $i = 1, \dots, I$ に対し以下を計算する .

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{f(y_{t+1}|h_{t+1}^i) f(h_{t+1}^i|y_t, h_t^i, S_t^i, S_{t-1}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}) f(S_t^i|S_{t-1}^i, \boldsymbol{p}) \hat{f}(h_t^i, S_{t-1}^i|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}{g((h_{t+1}^i, S_t^i), (h_t^i, S_{t-1}^i)|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})} \\ &= \frac{f(y_{t+1}|h_{t+1}^i) \hat{f}(h_t^i, S_{t-1}^i|y^t, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}{g(h_t^i, S_{t-1}^i|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})}, \end{aligned}$$

そして

$$\bar{w}_t = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I w_i$$

を保存し, $\hat{f}(h_{t+1}^i, S_t^i|y^{t+1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p}) = \pi_{t+1}^i = w_i / \sum_{j=1}^I w_j$ ($i = 1, \dots, I$) とする .

3. $t \leftarrow t+1$ として, Step 2 に戻る .

すると $I \rightarrow \infty$ のとき, 対数尤度は

$$\sum_{t=1}^n \log \bar{w}_t \xrightarrow{p} \sum_{t=1}^n \log f(y_t|y^{t-1}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$$

となる .

参考文献

- [1] Carter, C.K. and Kohn, R. 1994. On Gibbs sampling for state space models. *Biometrika*. 81, 541-553.
- [2] Chib, S., 1995. Marginal likelihood from the Gibbs output. *Journal of the American Statistical Association*. 90, 1313-1321.
- [3] Chib, S., 1996. Calculating posterior distributions and modal estimates in Markov mixture models. *Journal of Econometrics*. 75, 221-241.
- [4] Chib, S., 2001. Markov chain Monte Carlo methods: computation and inference. In: Heckman, J.J., Leamer, E. (Eds.), *Handbook of Econometrics*. Vol. 5. North-Holland, Amsterdam, pp. 3569-3649.
- [5] Chib, S., and Jeliazkov I., 2001. Marginal likelihood from the Metropolis Hastings output. *Journal of the American Statistical Association*. 96, 270-281.
- [6] Chib, S., and Jeliazkov, I., 2005. Accept-reject Metropolis-Hastings sampling and marginal likelihood estimation. *Statistica Neerlandica*, 59, 30-44.
- [7] de Jong, P., 1991. The Diffuse Kalman filter, *The Annals of Statistics*. 19, 1073-83.
- [8] de Jong, P., Shephard, N., 1995. The simulation smoother for time series models. *Biometrika* 82, 339-350.
- [9] Doornik, J. A., 2006. *Ox: Object Oriented Martrix Programming*, 4,10. Timberlake Consultants Press, London.
- [10] Frühwirth-Schnatter, S., 2001. Markov chain Monte Carlo estimation of classical and dynamic switching and mixture model. *Journal of the American Statistical Association* 96, 194-209.
- [11] Frühwirth-Schnatter, S., 2004. Estimating marginal likelihoods for mixture and Markov switching model using bridge sampling techniques. *The Econometrics Journal* 7, 143-167.
- [12] Frühwirth-Schnatter, S., 2006. *Finite mixture and Markov switching models*. Springer-Verlag, New York.
- [13] Geweke, J. F. 1992, Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics*, 4, New York: Oxford University Press, p169-188.
- [14] Ghysels, E., Harvey, A. C., Renault, E., 1996. Stochastic volatility. In: Rao, C.R., Maddala, G. S. (Eds.), *Statistical Methods in Finance*. North-Holland, Amsterdam, pp. 119-191.
- [15] Hwang, S., Satchell, S.E., and Pereira. P.L.V., 2004. How persistent is volatility? an answer with stochastic volatility models with Markov regime switching state equations. IBMEC SÃO PAULO financelab working paper-FLWP-01-2004.
- [16] Jasra, A., Holmes, C. C., and Stephens, D. A., 2005. Markov chain Monte Carlo methods and the label switching problem in Bayesian mixture modeling. *Statistical Science*. 20, 50-67.
- [17] Kalimipalli, M., and Susmel, R., 2004. Regieme-Switching stochastic volatility and short-term interest rate, *Journal of Empirical Finance* 11 309-329.
- [18] Kim, C.-J. and Nelson, C.R. 1999. *State-space models with regime switching*, MIT press, Cambridge, Massachusetts.
- [19] Kim, S., Shephard, N., Chib, S., 1998. Stochastic volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. *Review of Economic Studies*, 65, 361-394.

- [20] Maheu, J. M., and McCurdy, T. H., 2000 Identifying bull and bear markets in stock returns, *Journal of Business & Economic Statistics* 18 100-112.
- [21] Mao, X., Truman, A., and Yuan, C., 2006. Euler-Maruyama approximations in mean-reverting stochastic volatility model under regime-switching. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. Article ID 80967 1-20.
- [22] Mao, X., and Yuan, C., 2006. *Stochastic differential equations with Markovian switching*. Imperial College Press
- [23] Meng, X.-L. and Wong, W. H. , 1996. Simulating ratios of normalizing constants via a simple identity: A thoretical exploration. *Statistica Sinica*. 6, 831-860.
- [24] Omori, Y., Chib, S., Shephard, N., and Nakajima, J., 2007. Stochastic volatility with leverage: fast and efficien likelihood inference. *Journal of Econometrics*. 140-2, 425-449.
- [25] Omori, Y., and Watanabe, T., 2008. Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models. *Computational Statistics and Data Analysis*, in press.
- [26] Pitt, M. K., Shephard, N., 1999. Filtering via simulation: auxiliary particle filter. *Journal of the American Statistical Association*, 94, 590-599.
- [27] Robert, C.P., and Casella, G., 2004 *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [28] Shephard, N., 2005. *Stochastic Volatility: Selected Reading*. Oxford University Press, Oxford.
- [29] Shephard, N., and Pitt, M. K., 1997. Likelihood analysis of non-Gaussian measurement time series, *Biometrika*. 84, 653-667.
- [30] Shibata, M., and Watanabe, T., 2005. Bayesian Analysis of a Markov Switching Stochastic Volatility Model. *Journal of the Japan Statistical Society* 35, 205-219.
- [31] Smith, D. R., 2002. Markov-switching and stochastic volatility diffusion models of short-term interest rates, *Journal of Bussiness and Economic Statistics*. 30, 183-197.
- [32] So, M. K. P., Lam, K., and Li, W. K., 1998. A stochastic volatility model with Markov switching, *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 244-53.
- [33] Takahashi, M., Omori, Y., and Watanabe, T., 2007. Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously, *CIRJE discussion paper series F-515*.
- [34] Tierney, L., 1994. Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion) *The Annals of Statistics*. 22,1701-1762.
- [35] Watanabe, T., Omori, Y., 2004. Multi-move sampler for estimating non-Gaussian time series models: Comments on Shephard and Pitt(1997). *Biometrika*, 91, 246-248.
- [36] 伊庭幸人・種村正美・大森裕浩・和合肇・佐藤整尚・高橋明彦, 2005 『計算統計Ⅱ マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』 岩波書店 .
- [37] 大森裕浩, 2001 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」. 『日本統計学会誌』 . 31, 305-334.
- [38] 里吉清隆, 2005 「マルコフ・スイッチングを含む確率的ボラティリティ変動モデル」『ベイズ計量経済分析』 . 東洋経済新報社.
- [39] 中妻照雄, 2003 『ファイナンスのためのMCMC法によるベイズ分析』 三菱経済研究所.
- [40] 和合肇編, 2005. 『ベイズ計量経済分析』 東洋経済新報社.
- [41] 渡部敏明. 2000. 『ボラティリティ変動モデル』 朝倉書店.
- [42] 渡部敏明. 2005. 「マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定法」. 『ベイズ計量経済分析』 . 東洋経済新報社.