CIRJE-J-50

リスクと最適資産課税
──連続時間、多資産モデルにおける分析──

日本学術振興会 特別研究員

下川哲矢

2001 年 3 月

Risk and Optimal Capital Income Taxation in a Continuous-Time, Multi-capital Economy[1]

Tetsuya Shimokawa
Research fellow of the Japan Society for the Promotion of Science,
Faculty of Economics, The University of Tokyo

March 2001

Abstract： This article investigates the Ramsey capital income taxation in a stochastic multi-asset economy, consisting of forward-looking representative agents. To address this issue, we adopt a continuous-time framework, in which uncertain asset returns are modeled as some Ito processes. This specification of the uncertainty allows us to deal with the higher moments explicitly and show how the risks on asset returns affect the optimal tax rate.

[1] この研究は著者が CIRJE 研究員であった期間に得られた成果である。また、この研究は科学研究費補助金のサポートも受けている。

１、はじめに

本論文では、代表的消費者の存在する動学モデルを使って、不確実性下における最適資本課税を分析する。
動学モデルを使った最適資本課税の分析は、80 年代の前半から目立ち始めるが、Chamley(1986)や Judd(1985)の研究によって、その後の研究の方向が決定されたといえる。Chamley(1986)は、決定論的なフレームを用いて分析を行い、定常状態において最適資本課税率は０でなくてはならないことを示した。さらに Judd(1985)は、その結果が個人間の再分配政策を考慮したとしてもロバストであることを明らかにしている[2]。

不確実性下への拡張は、Zhu(1992)によってはじめて行われた。不確実性下での資本課税の分析は、それ以前にもいくつか見られるが（たとえば Eaton(1981)）、いわゆるラムゼイ流の最適資本課税問題を厳密に定式化して分析したのは Zhu(1992)がはじめてである。そこで彼は、定常分布上においても最適資本課税率は一般に０にならないことを示している。すなわち、０資本課税定理は不確実性下には拡張できないことになる。彼はこの結果を離散モデルを用いて分析している。 Chari-Christiano-Kehoe(1994)では、同じく離散モデルを用い、効用関数と生産関数を特定化した上で、シミュレーション分析を行った。彼等はリスクと最適資本課税との関係を明らかにした上で、定常分布上において最適資本課税率は０ではないが、小さな値であることを強調した。

これらの研究の後、私の知る限り、不確実性下の最適課税の研究には目だった進展はない。しかしながら、このことは不確実性下の資本課税問題が重要なテーマではなくなったことを意味するものではない。むしろ状況は反対であろう。資産の保有形態がより多様になり、リスク管理がより進歩している今日、不確実性下における資産課税ルールを明らかにすることの重要性はますます高まっているといえる。
また、研究に進展がないからといって、追加的な研究の余地のないほどに、不確実性下における資本課税ルールが明らかにされているわけでもない[3]。むしろ反対に、これまでの分析

---

[2] その後、90 年代に入り、さらに発展的なモデルにおいてこの結果は検討されているが（Ayagari(1995), Jones-Manuelli-Rossi(1993,1997), Judd(1999)）。これらのモデルでは、必ずしも０資本課税率定理は成立しないことが明らかにされている。ただし Judd(1999)では非常に弱い条件のもとで最適資本課税率は平均として０となる。

[3] 読者の中には、Chari-Christiano-Kehoe(1994)のシミュレーション結果をもって、不確実性下の最適資本課税ルールがほぼ理解されたと考えられる方も、あるいはいるかもしれない。しかしながら、後で見るように、最適資本課税ルールは効用関数の形に大きく影響される。このことを考慮すれば、効用関数を事

では、リスクと最適資本課税の基本的な関係がすべて理解されたとは到底言えない。たとえば、解決されるべき疑問点を、我々は直ちにリストアップすることができる。

①<u>リスクと課税の関係</u>：資本収益の分散と最適課税の間にはどのような関係があるのか。たとえば、ある資本収益の分散が増加した場合、それに対して資本課税率はどのように、どれだけ反応すべきであるのか。また、その大きさは何によってに決定されるのか。
②<u>多資本間の最適な課税体系</u>：収益の期待値や分散（リスク）が異なる多くの資本がある場合（それが現実的な場合であると思われるが）全体の最適資本課税体系はどのようになるか。あるいは各資本間の最適課税率にはどのような関係があるのか。
③<u>政府と民間の直面するリスクが異なる場合の課税</u>：現実には政府と民間が異なるリスクに直面していると考えられる。たとえば民間がブランチャード流の Lifetime uncertainty に曝されているような場合、両者の直面するリスクの非対称性を反映して最適課税体系はどのように変化すべきか。

①について、既存の研究では数値計算による分析があるのみであり、リスクと課税の関係を現す明示的な公式は得られていない。しかしながら①は非常に基本的な問いであり、リスクと最適課税の関係を考えるときに、真っ先に解決されるべき問題であるといえる。数値計算による分析は、確かに多くの情報をもたらすものであるが、リスクと最適政策とを結びつける明示的な関係式は得られないという限界がある。また、しばしば指摘されているように、比較静学がしづらいために、直感的な理解が十分に得られるとも言い難い。
②は、たとえば「ある特定の資本財収益率の変動が１０％増大した場合、全体の資本課税体系はどのように変化すべきか」といった問題を問うものである。決定論的なモデルでは、各資本からの収益率は基本的には同じであるから、多資本間の分析は扱えない。したがって、多資本間の最適課税は、不確実性下でのフレームにおいてはじめて分析が可能となる問題であるが、私の知る限り、未だになにも分析されていない。
③も、政府と民間の直面するリスクや情報の非対称性が、最適政策にどのように反映されるかを分析する上で基本となる問題である。また、Lifetime uncertainty を含むモデルは OG モデルと Dynasty モデルとの関係を調べる上でも分析が待たれるところであるが、何ら分析されていない状態である。

前に特定化した彼等の分析は限定的なものである可能性がある。また、おそらくもっと重要なのは、彼等の結果が非常に理想的な基本モデルでしか成立しないという点である。たとえば、これも後で見るが、直面するリスクや得られる情報が、政府と代表的消費者との間で異なるような場合、最適資本課税率の大きさは決して小さなものではなくなる。したがって彼等の分析をもって不確実性下の資本課税がほぼ理解できたとすることは出来ない。

では、なぜこれらの基礎的な問題が未解決のまま放置されているのだろうか？何がこれらの分析を難しくしているのだろうか？その理由は、リスクあるいは高次のモーメントが、政策分析に頻用されている離散モデルでは扱いづらい（明示的には扱えない）、という事情にあるものとおもわれる。Grinols and Tunovsky(1993)の言葉を借りれば、“Current macroeconomic theory is disappointingly limited in its ability to deal adequately with risk”（page1）ということになる[4]。もし、リスクなどの高次モーメントを明示的に扱える分析フレームが手に入れば、リスクを現す変数を既存の決定論的な分析に付加することによって、より容易に上記の問題たちを解決することが出来る。

この論文では、このような問題意識のもとに、高次モーメントを扱える分析体系を整備し提案する。したがってこの論文は、今後行われるべきより発展的な問題分析のための First Step となるものである。我々は分析フレームを提案するにあたり、連続時間モデルを用い、不確実性は伊藤過程によってあらわされるものとする。不確実性に関するこの弱い限定が多くの利益をもたらすことは、すでにこの方面の分析が進んでいるファイナンスの分野を見れば明らかであろう。

一般に、提案された分析フレームが、今後の研究の土台となるためには以下の条件が満たされなくてはならないだろう。

---

[4] Grinols and Tunovsky(1993)や、彼等のこれに続く研究は、我々と同じ問題意識に基づいており、分析フレームも我々のものとよく似ている。しかしながら、彼等の分析は我々の分析と２つの点で大きく違っている。

第１は、効用関数を異時点間代替の弾力性が一定の関数に、生産関数を AK 型関数に、それぞれ特定している点である。この理由は、これらの特定化によって、Closed Form の解を得ることが出来るからである。連続時間モデルを用いた不確実性下の政策分析は、彼等のほかにもいくつかあるが（Eaton(1981), Smith(1996), Corsetti(1997)）、ほぼすべての研究においてこの仮定が置かれている。しかしながら、最適資本課税ルールの分析においては、この仮定は非常に制約的なものとなる。なぜなら、後で見るように最適課税ルールは、まさに効用関数の形によって決まるものであるからである。この点を考慮して、われわれは、最適課税ルールと特徴付ける際、効用関数や生産関数に関して、ごく一般的な仮定しか課さない。

第２の点は、彼等の分析しているのはラムゼイ型の最適課税問題ではないという点である。彼等の分析では、従って、課税による歪みの影響が考慮されない。最適資本下税率が０になるという彼等の分析結果が、４－２におけるわれわれの結果と一致するのは、彼等の使用した関数系（homogeneous utility function）においてだけ、課税による歪みの大きさが通時的に一定となり、それゆえ歪みを考慮しない場合の結果と一致するからである。

１、既存の研究を包含している（あるいは整合的）であること
２、分析に際して、直感的なインプリケーションに富んでいること
３、扱いやすく、それゆえ既存の分析フレームでは難しかったより発展的な分析が容易に行えること

われわれは Section ３、４において、資本課税に関する一般的な公式を導出し、この公式が既存の主要な結果と整合的であることを示す。これによって、上の１、２の条件を我々の分析フレームが満たすことを示したい。また、ここで導出された公式は上記の①②の問題に一つの解答を与えるものでもある。さらに、Section5 において、我々は③の問題を検討する。これによって、我々の分析フレームが３の性質も持っていることを強調したい。

最後に、位置付けを明確にするために、もう一度我々の分析と既存の研究との関係を整理しておく。
まず、Zhu(1992)や Chari-Christiano-Kehoe(1994)との関係について。彼等は離散モデルによる分析であるが、我々は連続時間モデルによる分析である。我々の分析フレームは彼等のそれと比較して、高次のモーメントを明示的に扱えるという利点を持つ。この利点によって、我々のフレームが彼等の分析で得られた結果を含み、かつそれ以上の発展的な分析に有用であることをこの論文では示す。
つぎに Grinols and Tunovsky(1993)および彼等のこれに続く研究との関係について。彼等の分析フレームも我々の分析フレームも連続時間モデルであり、その点ではよく似ている。しかしながら、彼等は効用関数と生産関数の形を事前に限定している。また、最適課税の分析についても、彼等の分析は歪みを考慮したラムゼイ流の分析にはなっていない。

２　代表的消費者

２－１　設定

この論文では、通常仮定されるように、経済の不確実性は外生的なショックによって生じるものとする。さらにそれが多次元（有限）のブラウン運動としてあらわせることを仮定する。また、簡単化のために経済に加わるショックは生産性ショックのみに限定する。ショックを生産性ショックに限定するのは、第 1 段階における説明の簡易化のためであって、たとえば数値的な分析においてよく仮定されるように、政府支出によるショックやあるいは貨幣的なショックを導入して分析を拡張することも難しいことではない。また、ショックを多次元ブラウン運動を用いて定式化するメリットについては、既にこの定式化が進んでいるファイナンスの分野での研究成果を見れば多言を有しないところである。一言で言えば、最適税率あるいは均衡に対する高次モーメントの影響を明示的に分析できるようになる点が、不確実性

をブラウン運動で現す最大のメリットである。これに対し、通常、頻繁に行われる離散時間での定式化では、不確実性に関する 1 次のモーメント、すなわち期待値しか明示的に扱えない。したがってそれ以上の分析のためには、たとえばリスクと最適政策との関係を見るためには、数値計算を用いるか、あるいはある特殊な関数系を仮定するしかない。我々の定式化では不確実性を伊藤過程に特定化してしまうという若干の制約はあるものの、分散あるいは共分散の最適課税政策への影響を明示的に観察することが可能となる。

まず、代表的消費者の意思決定を定式化しよう。消費者は政府によって決定される各種税率、政府支出といった政策変数を所与として、彼の予算制約のもとで通時的な最適化をおこなうとする。消費者は消費と労働力の最適分配のほか、本稿では複数の資産（公債と資本ストック）を扱うので、それらへの資金の最適分配も行うことになる。

消費者の予算制約式を特定する。
消費者の収入は労働所得と、公債や資本ストックといった資産保有からの利益からなる。この経済には n 種類の資本(i で index される)と 1 種類の公債があり、それぞれの資産は期待収益率と収益のリスクによって特徴付けられている。通常の設定のように消費者は資本ストックを株式の形で保有している。
資本ストックからの利益は、生産関数の完全分配の仮定のもとで、当該保有資本から得られる限界生産物に等しくなるが、各資本の限界生産性は常にショックに曝されており不確実であるとする。不確実性に関するこのような仮定はマクロ経済学では一般的である。我々のモデルではショックを伊藤過程を用いて特定化する。すなわち各資本の瞬時的な限界生産性は m 次元（標準）ブラウン運動 z^a， $a \in [1,2,\cdots,m]$ を用いて次のように書けるとする。

$$f_i(k_1,\cdots,k_n,l)dt + \sum_a^m q^{kia} k_i dz^a$$

ここで、 $f_i(k_1,\cdots,k_n,l)$ は瞬時における期待限界生産性であり、 $\sum_a^m q^{kia} dz^a$ は技術ショックによる変動分である。 q^{kia} はブラウン運動 z^a であらわされるショックによって引き起こされる資本 i の収益変動のボラティリティである。消費者の資本からの純所得は上記の式から資本所得課税を差し引いた額に保有資本量を掛けた額となる。また、公債からの（限界）収入に関しては不確実性が無いものと仮定し、 r^b を公債の確実な利子率として、 $r^b dt$ と書く。

消費者の支出は消費財の消費 c と税金の支払いからなる。
税金は労働所得および資本ストックからの所得に課税されるが、課税率は消費者の意思決定では外生変数である。

資本所得への課税はEaton(1981)に習い、収入の確実性パートおよび不確実パートの両方に異なる税率が適用されるとしてモデル化しよう。資本iからの限界収益の確実性パートへの線形な税率を$\boldsymbol{t}^i$、不確実性パートへのそれ（ブラウン運動z^aに対応する部分）を$\boldsymbol{h}^{ia}$とすると当該期間における税引き後の資本の限界収益は

$$\left(1-\boldsymbol{t}^i\right)f_i\left(k_1,\cdots,k_n,l\right)dt+\sum_a^m\left(1-\boldsymbol{h}^{ia}\right)\boldsymbol{q}^{kia}\,dz^a$$

と書ける。以後、資本の税引き後期待利潤率を$\hat{r}^i\equiv\left(1-\boldsymbol{t}^i\right)f_i\left(k_1,\cdots,k_n,l\right)$、税引き後の限界収益のボラティリティを$\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\equiv\left(1-\boldsymbol{h}^{ia}\right)\boldsymbol{q}^{kia}$と書く。すなわち消費者の資本iからの税引後収益は以下のように定義される。

$$\hat{r}^i k^i dt+\sum_a^m\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\,k^i dz^a$$

ただし、あとで見るように確実パートへの最適課税率と不確実パートへの最適課税率の組み合わせは非決定性を持ち、一般には一意に決まらない。したがって最適税率の組み合わせを一意に得るためには追加的な条件が必要となる。 たとえば極めて現実的な例として、事前に税率が決定されている場合を考えると、追加的に、すべての資本 i について$\boldsymbol{t}^i=\boldsymbol{h}^{i1}=\cdots=\boldsymbol{h}^{ia}=\cdots=\boldsymbol{h}^{im}$の条件を与えることができる。これらの条件を加えることで、最適税率を一意に決めることが出来る。この点は後でふれる。

分析の簡単化のために、以下のような完備資産市場の仮定を置く。この仮定によってリスクの価値が裁定条件のみから一意に決定することが出来る。
仮定：行列$\left(\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,n\quad \boldsymbol{a}=1,2,\cdots,m\right)$は、**m**＝**n**であり、正則行列である。

すなわちすべての不確実性をヘッジすることが出来るほど、十分多くの資産が存在する。

また、純労働所得は、賃金率をw、労働供給量をlとして、線形な労働税率を$\boldsymbol{t}^l$とすると、$\left\{\left(1-\boldsymbol{t}^l\right)wl\right\}dt$となる。以下では税引き後賃金率を$\hat{w}$として、これを$\hat{w}l\,dt$と書く。

さらに、総資産を$a\equiv\sum_i k^i+b$と定義し、各資産のポートフォリオを$\boldsymbol{f}^i\equiv k^i/a$（$\vee i$）、$\boldsymbol{f}^{m+1}\equiv b/a$と書くと、以上の準備から代表的消費者の予算式を次のように定式化できる。

(1) $$da=\left\{\sum_i\hat{r}^i\boldsymbol{f}^i a+\hat{w}l+r^b\boldsymbol{f}^{m+1}a-c\right\}dt+\sum_i\sum_a\hat{\boldsymbol{q}}^{kia}\boldsymbol{f}^i a\,dz^a$$

上式の左辺は各時点に於ける瞬時的な資産の増加分であり、右辺第１項はその期待値、第２項はその不確実な部分に対応している。我々の設定では不確実性の源泉は生産性ショックであるから、代表的消費者の資産蓄積も株式からの利潤の変動を通してこのショックに影響さ

れることになる。決定論的な部分については通常の設定と同様である[5]。

消費者は上記の予算式のもとで消費、労働供給、資産分散に関する通時的な最適化を行う。消費者の瞬時的な効用関数を$U = E\left[\int_0^\infty e^{-rs} u(c,l)ds\right]$とする。ρは時間選好率である。さらに、各資本と公債の初期値をそれぞれ$k_0^i \ (\vee i), b_0$とすると、この最適化問題は以下のように特定される。

$$Max \quad U \quad s.t. \ (1), \ \vee i \ \ k^i(0) = k_0^i, \quad b(0) = b_0, \quad \sum_j^{m+1} f^j - 1 = 0$$

不確実性化の最適化問題の解法について

上記のような連続時間の不確実性下の問題を解くには、Hamilton-Jacobi-Bellman アプローチを持ち行るのが一般的であるが、本稿では Bismut(1973, 1975)による解法を用いる。この手法は Pontryagin による最大値原理を不確実性下に単純に拡張したものである（以下、本稿では Bisut-Pontryagin アプローチ、あるいは Dual アプローチと呼びたい）。

このアプローチを用いる利点は、資産価値を表す Dual 変数を明示的に扱える点にあり、これによって最適課税を分析する上で、多くの直感的示唆が得られることにある。これは本稿の分析の一つの特徴であると言える。また、ラムゼイ型最適課税論の分析とも相性が良いことも利点のひとつとして挙げられる。

Bisut-Pontryagin アプローチの基本的な考え方は次のようなものである。

---

[5] 数学的な補足：議論の主題を見えづらくするので、以下のような点はいちいち断らないが、この論文では暗黙のうちに仮定されている。

①、我々はブラウン運動 Z 上で定義された確率空間(Ω, F, P)上で議論する。ここでFはσ-algebras であり、Fを Z 上で自然に拡張したものを filtration $\hat{F} = \{F_t : t \in [0,\infty)\}$として採用している。そして、特に断りのない限り、本論文における我々の確率的なコメントは、「the filtered probability space $(\Omega, F, \hat{F}, P)$において、“almost surely”に」成立するコメントということである。

②、nonnegative, square-integrable, adapted stochastic processes の作る空間をL_+^2空間とすれば、消費過程の作る空間や労働過程の作る空間はL_+^2空間に含まれるとする。すなわち、任意の t について$c(t)$はF_t-measurable で、 nonnegative で、かつ $E\left[\int_0^t c(s)^2 ds\right] < \infty$を満たす。

③、総資産過程aは、任意の t について$E\left(\int_0^t \left\{\left\|q^k(s)\right\|^2\right\} ds\right) < \infty$を満たす伊藤過程である。さらに(1)式の解$a(t)$が一意に存在することを保証するために、いわゆる the growth condition と Lipshitz condition は満たされるものとする。

ある操作変数が最適経路上にあるためには、すべての時点において瞬時的な限界効用と、その時点で資産蓄積から得られる限界利益の割引価値が等しくならなくてはならない。
なぜなら、もし両者が異なっていればどちらかに所得を移動させることによって、消費者は追加的な効用を得る事が出来るからである。この考え方は、決定論的なフレームにおいてもおなじみのものであり､ポントリヤーギンの最大値定理において最適化の 1 階条件を形成することは周知である。 Bisut-Pontryagin アプローチでもこの条件が最適化の中核をなす。しかし、異なるのはこの条件がリスクを加味した形に拡張されている点である[6]。

今、消費者の資産の価値を表す Dual 変数をλとする。また、 Dual 変数λの動学プロセスは、Bismut にしたがって、以下のような Ito process で書けるとする[7]。すなわち、 z^a とλの共分散を H^a と書くと、λの動学プロセスは $d\,l = \dot{l}dt + \sum_{a} H^{a}\,dz^{a}$ と書けるとする[8]。

この式の直感的な意味を考えよう。この式は、資産の価値λがその期待成長率（右辺第 1 項）だけでなく、生産性ショック（他のショックが存在するモデルの場合はそのショックにもよる）によっても変動し、その影響の大きさが、相関を表す H^a で表されることを意味している（右辺第 2 項）。このことは、生産性ショックによって、資産からの限界リターンが変動することを考慮すれば、納得されるであろう。
決定論的な場合と比較すると、資産価格の変動式に不確実な部分（上式第 2 項）が加味されている点が特徴的である。そして、この式で重要な役割を果たしているのが共分散 H^a である。上式において、 $\sum_{a} H^{a}\,dz^{a}$ はショックによる資産価値の変動分であるから、$-H^{a} > 0$ は、 z^a であらわされるリスクの価格に対応していることがわかる。
ただし、現時点で H の値は今だ未定である。この時点では、H は未だ共分散を表す変数という意味しか持たない。この値は今後の分析において内生的に決定される。そして、我々の分析上重要な役割を果たすことになる。

さて、消費者の最適化問題を Dual アプローチを用いて具体的に解いてみよう。

---

[6] Bisut-Pontryagin アプローチは、ポントリヤーギンの最大値定理の単純な拡張であるが、不確実性下におけるマクロ分析に使用される例はなぜか少ない。このアプローチはファイナンスの分野ではいくつかの応用がなされているが、マクロ政策の分析に用いられている例を私は知らない。Brock-Magill(1979)は Dual アプローチを用いて不確実性下のターンパイク性の分析を行っている。

[7] 本論文では天下り的にこの事実を前提にする。この前提が妥当であることの詳細については Bismut(1973)を参照されたい。

[8] ただし任意の t について $E\left(\int_0^t \left\{\left\|H(s)\right\|^2\right\} ds\right) < \infty$ を満たすとする。

まず、(c,l,f)の最適経路は、各時点において、期待効用と資本ストック増加からの期待利得の和を最大化しなくてはならない。
すなわち $E_t\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{-rs}u(c,l)ds\right]+E_t\left[\int_t^{t+\Delta t} d\left(e^{-rt}\,\boldsymbol{l}\,a\right)\right]$を最大化するように決まる。以下、直感的にハミルトニアンを導出してみる。上式を伊藤の補題を用いて計算すると、

$$E_t\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{-rs}\left\{u(c,l)+\boldsymbol{l}\left(\sum_i \hat{r}^i f^i a+\hat{w}l+r^b f^{m+1}a-c\right)+\sum_i\sum_a H^a\hat{q}^{kia}f^i a\right\}ds\right]$$
$$+E_t\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{-rs}\left\{\dot{\boldsymbol{l}}a-r\,\boldsymbol{l}\,a\right\}ds\right]+E_t\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{-rs}\left(a\sum_a H^a+\boldsymbol{l}\sum_i\sum_a \hat{q}^{kia}f^i a\right)dz^a\right]$$

となる。伊藤積分の期待値が 0 になることを考慮し、$\Delta t\to 0$ とすると、上式は

$$e^{-rs}\left\{u(c,l)+\boldsymbol{l}\left(\sum_i \hat{r}^i f^i a+\hat{w}l+r^b f^{m+1}a-c\right)+\sum_i\sum_a H^a\hat{q}^{kia}f^i a+\left(\dot{\boldsymbol{l}}a-r\,\boldsymbol{l}\,a\right)\right\}$$

となる。決定論的なケースと比較すると第 3 項が加わっていることに注意されたい。ここで上式の第 1、2、3 項を一般化されたハミルトニアンとして定義する。すなわち、Vをポートフォリオ制約式のラグランジュ乗数とすれば、一般化されたハミルトニアンは、

$$Hamiltonian=u(c.l)+\boldsymbol{l}\left\{\sum_i \hat{r}^i f^i a+\hat{w}l+r^b f^{m+1}a-c\right\}+\sum_i\sum_a H^a\hat{q}^{kia}f^i a+z\left(1-\sum_j^{m+1}f^j\right)$$

と定義される[9]。
ハミルトニアンが、各時点における消費や労働供給選択（資産蓄積の選択でもある）が効用にもたらす総貢献分をあらわすのは決定論的なケースと同様である。異なるのは上式右辺第 3 項においてリスクの価値を考慮している点である。第 3 項において、$af^i\hat{q}^{kia}$ は、資本k^iのブラウン運動dz^aで現されるショックによる資本収益の変動分であり、それがリスクの価格$\left(-H^a\right)$で評価されている。すなわちリスクによる割引率の減少（あるいはリスクプレミアム）を第 3 項はあらわしている。

1 階の条件を求めよう[10]。
まず、消費 c と労働 l に関する条件から

(2)　　$u_c(c,l)-\boldsymbol{l}=0$

(3)　　$u_l(c,l)+\hat{w}\,\boldsymbol{l}=0$

である。これらは決定論的な場合とまったく同じものである。

[9] 以下のレシピは Bismut(1975)にある。
[10] 天下り的ではあるが、以下では横断性条件 $\lim_{T\to\infty}E_0\left[e^{-rT}\,\boldsymbol{l}(T)a(T)\right]=0$ を仮定する。十分条件については詳しくは Brock-Magill(1979)を参照されたい。

次に資産のポートフォリオ f^i, $\forall i \in \{1,2,\cdots,m+1\}$ に関する最適化から

(4) $$r^b = \frac{z}{la}$$

(5) $$\hat{r}^i + \sum_a \frac{H^a}{l}\hat{q}^{kia} = \frac{z}{la}、\quad \vee i = 1,\cdots,m$$

となる。左辺はそれぞれの資産のリスクを加味した割引率である。公債リターンには不確実性がないと仮定しているので、（4）式においてリスクは加味されていないが、各資本 i については（5）式左辺第 2 項において、それが加味されている。すなわち、資本リターンの分散（リスク）$\hat{q}^{kia}$ が、資産で測ったリスクの価値$\left(-H^a/l\right)$によって評価されている。

また、資産価値を表す Dual variable は以下の process に従う。

(6) $$\frac{dl}{l} = \left(r - r^b\right)dt + \sum_a \frac{H^a}{l}dz^a$$

右辺第 1 項は資産価値の期待成長率を表しており、この部分は決定論的な場合のそれと同様である。上式では、右辺第 2 項が決定論的なモデルに付け加わっている。右辺第 2 項は資産価格成長率のショックによる変動分であり、それは資産で測ったリスクの価値$\left(-H^a/l\right)$によって評価されることを意味している。

ここまでの分析で、Dual Approach においては、リスクの価格$\left(-H^a\right)$、あるいは資産で測ったリスクの価値$\left(-H^a/l\right)$が、重要な意味を持つことが理解されるだろう。しかし、先述したように、現時点において、H^a は資産価値λとブラウン運動 z^a の共分散という意味付けしか持たない。それは資産価値の変動ｄλを定義するために、外生的に与えられた記号でしかない。

次の節では、リスクの価値$\left(-H^a/l\right)$が、均衡において、消費と労働供給から内生的に決定されることを見たい。この特徴づけはいわゆる C-CAPM に対応することに読者は後節で気付かれるだろう。
本稿の分析では最適税率とリスクの関係が主として分析されるが、その関係は「外生ショックの分散の大きさ」と「当該ショックの消費や労働供給への影響の大きさ、すなわち共分散」で特徴付けられる。この点は C-CAPM とまったく同様である。したがって我々の分析は、C-CAPM のアナロジーを用いれば、Consumption based な最適課税の特徴づけであるともいえる。

２－２　均衡、C‐CAPM

最適政策の分析に移る前に、政策変数を所与とした場合の均衡について簡単に見ておきたい。特に、いくつかの均衡条件から、リスクの価値$\left(-H^a/l\right)$の値を内生的に導出し、それを用いて均衡における資産の裁定式がC-CAPMと整合的であることを、まず確認しておきたい。

（4）（5）式よりxを消去すると、

(7)　$$\hat{r}^{i}+\sum_a \frac{H^a}{l}\hat{q}^{kia}=r^b$$

が得られる。これは公債と資本i間の裁定式である。先ほども見たように、$\left(-H^a/l\right)$は（資本で測った）リスクの価格であり、左辺第2項$\left(-\sum_a \frac{H^a}{l}\hat{q}^{kia}\right)$は資本iを保有することに伴うリスクプレミアムと解することができる。

さて、均衡において、このリスクの価値がどのように決定されるのか見よう。
結論から始める。

Fact1
いま、均衡における消費と労働が次の伊藤過程に従うとする。

$$\frac{dc}{c}=m^c dt+\sum_a q^{ca}\,dz^a \text{、} \frac{dl}{l}=m^l dt+\sum_a q^{la}\,dz^a$$

このとき、均衡における（資本で測った）リスクの価値は以下のように決定される[11]。

(8)　$$-\frac{H^a}{l}=-\left\{\frac{u_{cc}c}{u_c}q^{ca}+\frac{u_{cl}l}{u_c}q^{la}\right\}$$

証明：均衡において（2）は常に成立はずであるから、伊藤の補題に注意して、(2)を展開して変化率を取り、それを(6)と比較すれば良い。□

この証明から、リスクプレミアム$\left(-\sum_a \frac{H^a}{l}\hat{q}^{kia}\right)$は、「限界効用の変化率$\left(du_c/u_c\right)$あるいは資本価値の変化率$\left(d\,l/l\right)$と、資本からの限界収益率との共分散」であることがわかる。これはよく知られた事実であり、我々の定式化においてもこの事実が確認できる。

---

[11] 反対に（6）を仮定すれば、均衡において消費と労働が上のような伊藤過程に従うことを（2）（3）から示すことができる。すなわち合理的期待に整合的である。

つぎに、直感的理解を促すために、一つの例を考えよう。以下の例は、本論の分析においてしばしば用いられる。その理由はリスクの価値（8）を消費のみ（労働は無視できる）で現すことができ、それゆえ結果の解釈を容易にするからである[12]。

例１：効用関数が分離可能であるとする。具体的には convex な関数 u(•), v(•)によって $u(c,l)=u(c)+v(l)$ と表せるものと仮定する。

この例では(8)において $u_{cl}=0$ であるから、リスクの価格は

(8)´ $$-\frac{H^a}{l}=-\frac{u_{cc}c}{u_c}q^{ca}$$

となり、資本 i のリスクプレミアムは $-\frac{u_{cc}c}{u_c}\sum_a q^{ca}q^{kia}$ となる。これはリスクプレミアムが「消費の成長率と資本 i の限界収益率との共分散」、それに「相対的リスク回避度」の積として決まることを現している。すなわち、ある資本収益変動のリスクプレミアムは、その収益変動が消費の成長率に影響を与えるほど、また人々の相対的リスク回避度が大きいほど、大きなものとなる。

３　政府

以上では、代表的消費者の意思決定問題を定式化し、政策変数を所与としたときの均衡（特に資産選択式）を簡単に確認した。

この Section の目的は、不確実性下における最適資本課税公式を、より一般的な枠組みで導出することにある。この Section で導出される最適課税公式（25）および（31）は、本論文の中心となる結果である。ここで得られた公式は、次の Section4 において、特殊な効用関数に限定することで、より深いテーマに適用され、また Section5 において、さらに発展的な状況下に拡張される。

この Section で得られる我々の最適課税公式を、Chamley(1986)や Judd(1985, 1999)らの決定論的なモデルでの公式と比較すると、不確実性を表す高次のモーメントが付け加わったものとなっている。仮に不確実性がないとすると、我々の公式は Judd(1999, Theorem8)

[12] その他の代表的な関数系については Section ４においてまとめて取り上げる。

のそれに一致する。したがって、我々の公式は既存の結果の不確実性下への、直接の拡張と位置付けることが出来る。
また、我々の公式を、Zhu(1992)による不確実性下の離散モデルでの最適課税公式と比較すると、我々のモデルでは、分散（リスク）や相関をあらわす高次モーメントが明示的に扱われている。我々の公式が持つこの性質は、より複雑な分析も容易にしてくれるという利点をもつ。たとえば、本 Section で分析される多資本下の最適資本課税ルールは、これまでの研究では未だ理解されていないテーマであり、われわれの定式化の有効性を示すひとつの例であると考える。

３－１　Ramsey Problem

この Section では政策決定者の意思決定問題を扱う。
政策決定者は、代表的消費者の最適化行動および初期条件、それに政府支出ｇを所与として、代表的消費者の効用関数（社会厚生関数）を最大化するように税率を決定する。すなわち、我々はラムゼイ流の最適課税問題を解く。また、政府は計画された政策を事後的にも遵守するとする。すなわち時間不整合性の問題は回避できることを前提とする。

RBC の文脈では、資本の生産性だけでなく、政府支出にもショックがあるものとして定式化するのが一般的であるが、ここでは分析の簡単化のために政府支出に不確実性はないものとする。むろん不確実性を含む場合への拡張は容易であり、それによって政府支出ショックに関する最適税率の変動を観察できるようになる。けれども、それは本稿の結論に大幅な変更を及ぼすものではない。さらに、議論を興味深いものにするために、$\hat{r}_0^i > 0, \hat{q}_0^{kia} > 0 \ (\vee i, a)$を仮定しよう。すなわち、初期時点での課税額は一定範囲内に抑えられているとする[13]。

まず、政府の予算式を定義しよう。
いま、資本合計を$k \equiv \sum_i^m k^i$と定義し、そのなかの資本 i のシェアを$j^i \equiv k^i / k$と定義する。
すると政府の予算制約式は以下のように書ける。

$$(9) \quad db = \left\{ \sum_i \hat{r}^i j^i k + \hat{w} l - f\left(j^1 k, \cdots, j^m k, l\right) + r^b b + g \right\} dt + \sum_a \sum_i j^i k \left(\hat{q}^{kia} - q^{kia} \right) dz^a$$

ここで、右辺第 1 項は確実なパートからの純収入であり、右辺第 2 項は不確実なパートからの収入を現す。決定論的な場合と比べると、確実性パートは同様であるが、新たに不確実性

[13] もしこの仮定が無い場合、初期時点で出来るだけ多くの課税を貸すことが最適となる。なぜなら初期時点においては課税による歪みが生じないからである。

パートからの収入の部分が付け加わっている。この部分は資本の限界収益の変動に合わせて税収が変動することに対応している。

財市場の均衡条件式は

(10) $$dk = \left\{ f\left(\varphi^1 k, \cdots, \varphi^m k, l\right) - c - g \right\} dt + \sum_a \sum_i \varphi^i k \theta^{kia} dz^a$$

となる。こちらも確実性パートは決定論的な場合と同様であるが、資本の生産性の変動を表す不確実性パート（右辺第 2 項）が、新たに付加されている。

以上の制約式を用いて、政策決定者の意思決定問題は次のように特定される。

$$Max \quad U \quad s.t.\ (2), (3), (6), (7), (9), (10) \quad \forall i \ \ k^i(0) = k_0^i, \quad b(0) = b_0, \quad \sum_i^m \varphi^i - 1 = 0$$

制約条件（9）（10）は先に見た予算式と財市場の均衡式である。

（2）（3）（6）（7）は政府の意思決定が代表的消費者の意思決定（需要関数）と整合的でなければならないことに対応している。$\forall i \ \ k^i(0) = k_0^i, \quad b(0) = b_0$ は初期条件であり、$\sum_i^m \varphi^i - 1 = 0$ はポートフォリオの条件である。

我々は再び Dual アプローチを用いてこの問題を解こう。

まず、資本、政府負債、および λ の社会的限界価値（dual variable）をそれぞれ p^k, p^b, p^λ と定義しよう。

ただし、ここで社会的限界価値の「社会的」とは、「政策意思決定者にとっての」という意味であり、「税によるゆがみも考慮したうえでの」という意味で使っている。以下、「社会的限界価値」、「社会的な価値」などの文言を多用するが、いずれもこの意味で使用している。

また、各 j = k、b、λ について、社会的限界価値 p^j が

$$dp^j = \dot{p}^j dt + \sum_a T^{ja} dz^a \qquad \forall j = k, b, \lambda$$

という Ito 過程にしたがっているとしよう。ここで $\dot{p}^j$ は期待変化分をあらわし、以下ですぐに特定化される。また、T^{ja} は p^j と z^a の瞬時的な共分散である。今の時点では T^{ja} は単なる記号として定義しておこう。この前提は前節の分析の場合と同様であり、決定論的なモデルと上式を比較すると不確実性パートが新たに加わっている。

T^{ja} は我々の分析において、社会的なリスクの価格をあらわし重要な変数となる。T^{ja} の値はいまのところ未定であるが、前 Section での場合と同様に、のちほど内生的に決定される。したがって、ここでは p^j が Ito 過程に従うことだけを天下り的に仮定する。この過程の妥

当性については Bismut(1973)を見よ。

次に一般化されたハミルトニアンを定義したい。
そのために、資産の裁定条件をあらわす（7）を次のように書き換えよう。

(7)´ $$H^{a} = -\boldsymbol{l}\sum_{i}\hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^{i}-r^{b}\right) \qquad \vee\, \boldsymbol{a}=1,2,\cdots,m$$

ただし、ここで$\begin{pmatrix} \hat{s}^{11} & \cdots & \hat{s}^{1m} \\ \vdots & \hat{s}^{ia} & \vdots \\ \hat{s}^{m1} & \cdots & \hat{s}^{mm} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{q}^{k11} & \cdots & \hat{q}^{k1m} \\ \vdots & \hat{q}^{kia} & \vdots \\ \hat{q}^{km1} & \cdots & \hat{q}^{kmm} \end{pmatrix}^{-1}$ である。この変形が存在することは仮定 1 より保証される。

以上を用いて、一般化されたハミルトニアンは次のように定義される。

$$\begin{aligned} \text{Hamiltonian} = {} & u(c,l) + p^{k}\left\{ f\left(\boldsymbol{j}^{1}k,\cdots,\boldsymbol{j}^{m}k,l\right) - c - g \right\} \\ & + p^{b}\left\{ \sum_{i}\hat{r}^{i}\boldsymbol{j}^{i}k + \hat{w}l - f\left(\boldsymbol{j}^{1}k,\cdots,\boldsymbol{j}^{m}k,l\right) + r^{b}b + g \right\} \\ & + p^{l}\left(\boldsymbol{r}-r^{b}\right)\boldsymbol{l} \\ & + \boldsymbol{y}^{c}\left(u_{c} - \boldsymbol{l}\right) + \boldsymbol{y}^{l}\left(u_{l} + \hat{w}l\right) + V\left(1 - \sum_{i}^{m}\boldsymbol{j}^{i}\right) \\ & + \sum_{a}T^{ka}\sum_{i}\boldsymbol{j}^{i}k\boldsymbol{q}^{kia} + \sum_{a}T^{ba}\sum_{i}\boldsymbol{j}^{i}k\left(\hat{\boldsymbol{q}}^{kia} - \boldsymbol{q}^{kia}\right) - \sum_{a}T^{la}\,\boldsymbol{l}\sum_{i}\hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^{i} - r^{b}\right) \end{aligned}$$

ただしここで$\boldsymbol{y}^{c}, \boldsymbol{y}^{l}, V$はそれぞれ関係する条件のラグランジュアン乗数である。また、右辺の最終項の導出には(7)´を使っている。

このハミルトニアンの意味を考えよう。
このハミルトニアンは、政府の選択によって得られるある時点での社会的効用を現していると考えられる。それは消費と労働供給からの瞬時的な効用（右辺第 1 項）と、資本を蓄積することの社会的な価値の増加分（右辺第 2 項および第８項）、税によるゆがみの社会的価値の減少分（右辺第 3 項および第９項）[14]、消費者の意思決定と整合的であるためのコスト（右辺第４、５、６、１０項）からなっている。

決定論的なモデルと比較して、異なるのは、我々の定式化ではリスクの社会的価値が考慮さ

---

14 $-p^{b}$ が税によるゆがみの大きさ（社会的価値）を現すことは、決定論的な分析において良く知られている。我々の分析においてもこのことは同様である。これは、もし一括税が利用可能であるときの gain が $-p^{b}$ であることから分かる。詳しくは Chamley(1983, 1986)等を参照せよ。

れている点である。それぞれのリスク（分散）が価格T^{ja} （$\vee\ j = k, b, \boldsymbol{l}$）によって評価され、加味されている。もし、リスクが無ければ、すなわちθ＝0であるなら、我々のハミルトニアンは決定論的なモデルのそれ（See for example Judd (1999)）に一致する。

最適化の一階の条件を導出しよう[15]。
$\hat{r}^i, r^b, \hat{w}, c, l, \boldsymbol{j}^i$ に関する一階の条件は、それぞれ以下のようになる。

(11) $$p^b \boldsymbol{j}^i k - \boldsymbol{l} \sum_a \hat{s}^{ia} T^{la} = 0 \qquad \vee i = 1, 2, \cdots, m$$

(12) $$p^b b - p^l \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l} \sum_i \sum_a \hat{s}^{ia} T^{la} = 0$$

(13) $$\boldsymbol{y}^l = -\frac{p^b}{\boldsymbol{l}} l$$

(14) $$u_c - p^k + \boldsymbol{y}^c u_{cc} + \boldsymbol{y}^l u_{cl} = 0$$

(15) $$u_l + p^k f_l + p^b \left(\hat{w} - f_l \right) + \boldsymbol{y}^c u_{cl} + \boldsymbol{y}^l u_{ll} = 0$$

(16) $$f_i + \sum_a \frac{T^{ka}}{p^k} \boldsymbol{q}^{kia} + \frac{p^b}{p^k} \left\{ \left(\hat{r}^i - f_i \right) + \sum_a \frac{T^{ba}}{p^b} \left(\hat{\boldsymbol{q}}^{kia} - \boldsymbol{q}^{kia} \right) \right\} = \frac{V}{p^k k} \quad \vee i = 1, 2, \cdots, m$$

これらの意味を考えよう。
まず、(14)(15)に注目すると、これらの式は決定論的なモデルでの条件とまったく同じであることがわかる。
(2)から限界効用は資本の限界価値に等しいことを考慮すれば、(14)は資本の限界価値λと（税による歪みを考慮した）社会的限界価値 p^k の差が $\boldsymbol{y}^c u_{cc} + \boldsymbol{y}^l u_{cl}$ であらわされることを示している。この $\boldsymbol{y}^l$ は(13)から $-\frac{p^b}{\boldsymbol{l}} l$、またのちの補題で示すように $\boldsymbol{y}^c = -\frac{p^b}{\boldsymbol{l}} c$ となる。したがって(14)式は、代表的消費者の最適化行動を遵守することによる社会的コストが $-\frac{p^b}{\boldsymbol{l}} \left(u_{cc} c + u_{cl} l \right)$ であることを意味している。
(15)も同様で、労働の限界価値と社会的限界価値の差を規定する式となっている。
(16)の右辺は資本 i の社会的な限界利益をあらわしている。それは資本の限界期待利益（第 1 項）にリスクの社会的コスト（第 2 項）を加味し、さらに税の歪みによる損失を差し引いたもの（第 3、4 項）となっている。
また、(11)と(12)を足し合わせると $p^b a = p^l \boldsymbol{l}$ となる。公債を追加的に発行することの社会的価値（あるいは損失）が、限界効用を追加的に増加させる（消費を減らす）ことの社会的価値（あるいは損失）に等しいことを、この式は示している。

---

15 十分条件は天下り的に満たされるとする。

Dual 変数　p^k, p^b, p^l はそれぞれ以下のプロセスに従う。

(17)

$$\frac{dp^k}{p^k}=\left[r-\sum_i f_i j^i-\sum_a \frac{T^{ka}}{p^k}\sum_i q^{kia} j^i-\frac{p^b}{p^k}\left\{\sum_i\left(\hat{r}^i-f_i\right)j^i+\sum_a\frac{T^{ba}}{p^b}\sum_i\left(\hat{q}^{kia}-q^{kia}\right)j^i\right\}\right]dt+\sum_a\frac{T^{ka}}{p^k}dz^a$$

(18)
$$\frac{dp^b}{p^b}=\left(r-r^b\right)dt+\sum_a\frac{T^{ba}}{p^b}dz^a$$

(19)
$$\frac{dp^l}{p^l}=\left(r^b+\frac{y^c}{p^l}-\frac{y^l}{p^l}\hat{w}+\sum_a\frac{T^{la}}{p^l}\sum_i\hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^i-r^b\right)\right)dt+\sum_a\frac{T^{la}}{p^b}dz^a$$

(17)は、(16)を使って整理すると、

$$\frac{dp^k}{p^k}=\left[r-f_i-\sum_a\frac{T^{ka}}{p^k}q^{kia}-\frac{p^b}{p^k}\left\{\left(\hat{r}^i-f_i\right)+\sum_a\frac{T^{ba}}{p^b}\left(\hat{q}^{kia}-q^{kia}\right)\right\}\right]dt+\sum_a\frac{T^{ka}}{p^k}dz^a$$

となる。この式の右辺第 1 項は資本の社会的な期待割引率である。決定論的なモデルと異なるのは期待割引率が社会的なリスクのコスト（リスクプレミアム）を加味している点である。また、右辺第 2 項は資本の社会的価値のショックによる変動分に対応している。

(18)は、政府負債の社会的価値の変動率（あるいは租税による歪みの変動率）を規定している。右辺第 1 項は政府負債の社会的な期待割引率である。公債リターンには不確実性がないので、これは決定論的なモデルのそれと一致している。右辺第 2 項は政府負債の社会的価値のショックによる変動を現している。生産性ショックにより、ポートフォリオが変化し、ひいては政府負債の価値が変動するために、この項が加わっている。

(19)は、若干解釈しづらいが、λが限界効用であることを考慮すれば、限界効用の社会的価値の変動を規定する式と解釈できる。

今後の分析方針について

現時点において T^{ja} （$\vee\, j=k,b,l$）は、p^j （$\vee\, j=k,b,l$）と z^a の共分散である以外に何もわかっていない。しかしながら T^{ja} はリスクの価格に対応するものであり、リスクを評価するうえで、その値を決定することは非常に重要となる。これは決定論的なモデルを、不確実性下へ拡張するうえで最も重要な点であるとも言える。以下の我々の分析では、T^{ja} を決定することが一つの目標となる。T^{ja} が決定されれば、リスクの社会的価値、あるいは資本の社会的割引率などが自動的に決まることになり、決定論的な場合と全く同様にして最適課税ルールを特徴付けることが出来るからである。

前 Section で見たように、消費者の意思決定の場合、リスクの価格 H^a は消費需要と労働供給によって特徴付けることが出来た。いわゆる C-CAPM の考え方である。

では、リスクの社会的価格 T^{ja} はどのように特徴付けられるのだろうか？

結論を先取りして言えば、やはり消費需要と労働供給によって特徴付けることが出来る。ただし、それは H^a よりも若干複雑で、特にその決定には税によるゆがみを表す $y^c u_{cc} + y^l u_{cl}$ が重要な役割を果たすことになる。以下の Lemma1 で見るように $y^c u_{cc} + y^l u_{cl}$ は $-\frac{p^b}{l}(u_{cc}c + u_{cl}l)$ と書けるので、われわれは変数 v を新たに $v \equiv \left(-\frac{u_{cc}c + u_{cl}l}{l}\right) = \left(-\frac{u_{cc}c + u_{cl}l}{u_c}\right)$ と定義して、これによってリスクの社会的価値 T^{ja} を特徴付けることにする。

以下、T^{ba}、T^{la}、y^c、y^l は Lemma1,2 で、T^{ka} については Theorem1 で決定される。

３－２　d に関する重要な性質など

先に、ふれたように $-p^b$ は marginal excess burden の大きさを現している。いま、notation の簡単化のために、$d \equiv -p^b / l$ と定義しよう。すなわち d は、資本で測った marginal excess burden の大きさである。

まず、準備として、T^{ba}、T^{la}、y^c、y^l を決定しよう。y^l は 1 階の条件(13)から明らかである。y^c を決定するための基本方針は、決定論的な場合（Judd(1999)）と同じであるが、不確実性を表す項が加わるため式展開は若干煩雑になる。

Lemma1

(20) $$\frac{T^{la}}{p^l} = \sum_i \frac{k^i}{a}\hat{q}^{ia} \qquad \vee a = 1, 2, \cdots, m$$

(21) $$\frac{T^{ba}}{p^b} = \frac{H^a}{l} \qquad \vee a = 1, 2, \cdots, m$$

(22) $$y^c = dc、y^l = dl$$

証明：Appendix においておこなう。

以上の条件を使って、まず、最適課税ルールが満たすべき最も基本的な性質をしめそう。資本で測った marginal excess burden の大きさ（歪み）d について以下の補題が成立する。

Lemma2

(23) $$\frac{dd}{d} = 0$$

証明：Appendix **においておこなう。**

決定論的な体系でも、最適課税ルールのもとでは、dが通時的に一定でなくてはならないことが知られている（たとえば Chamley(1996)**）。これは、もし** marginal excess burden **の大きさが通時的に一定でないならば、それを均すことで、社会的効用を引き上げることが可能となるからである。我々の条件は、** marginal excess burden **の大きさは通時的のみならず、各** State **においても一定でなくてはならないことを要請している。理由は上記と同様である**[16]。

３－３　最適資本収益課税の特徴付け

以下では、ラムゼイ流の最適資本課税ルールを特徴づける。我々の定式化では、任意の資本 i **からの収益に関して、確実性パートと不確実性パートの両方に異なった税率を適用できることになっている。すなわち各資本 i にかんして、$\left(t^{i}, h^{i1}, \cdots, h^{im}\right)$という m＋１個の税率を決定する必要がある。この定式化は不確実性下における資本課税分析の先駆的業績である** Eaton(1981)**に習ったものであるが、よく知られているように、これらの税率の組みは最適化条件のみでは一意に決定できない。すなわちラムゼイ流の最適課税率の組合せは、一般に、m次元の非決定性を持つことになる（**Zhu(1992)、Chari-Christiano-Kehoe(1994)**）。**

実際、不確実性パートへの課税率h^{ia}（$\vee i, a$）に関する最適化の 1 **階条件は**

$$T^{ba} j^{i} k - \sum_{a} \hat{s}^{ia} T^{la} H^{a} = 0$$

であるが、確実性パートへの課税率t^{i}に関する 1 **階の条件**(11)**から**

$$T^{ba} j^{i} k - \frac{p^{b}}{l} j^{i} k H^{a} = p^{b} j^{i} k \left(\frac{T^{ba}}{p^{b}} - \frac{H^{a}}{l} \right) = 0$$

となり、さらに(21)**を考慮することで、この条件はt^{i}に関する最適化条件のもとで常に満たされていることが分かる。したがってh^{ia}（$\vee i, a$）に関しての** 1 **階の条件は、変数の決定には有効でなく、条件式の数が決定すべき変数の数よりもm個だけ少なくなる。**

この最適税率の非決定性を考慮して、以下の我々の分析では、税率ではなく、その組合せである最適限界課税収入について特徴付けることにしよう。すなわち、資本 I **からの（リスク修正した）限界課税収入を**

---

[16] δの絶対的な大きさ（すなわちδ(0)）は政府負債の初期条件によって決定される。k_0 を所与としたとき、dはb_0の増加関数となる。すなわち初期時点において資本に対する公債残高が大きいほど marginal excess burden も大きくなる。

$$\Pi^i \equiv t^i f_i + \sum_a \frac{H^a}{l} h^{ia} q^{kia}$$
$$\equiv \left(f_i - \hat{r}^i\right) + \sum_a \frac{H^a}{l}\left(q^{kia} - \hat{q}^{kia}\right)$$
と定義して、最適なΠ^iを分析する。
Π^iは最適税率m＋１個の組合せになっている。したがって、Π^iを特徴付ける場合、決定されなければならない変数が、個々の税率を決定する場合と比較して、m個だけ減少するわけである。このことは、追加的な条件なしでもΠ^iが一意に決定されることを意味している。Π^iの定義第1式の第1項は「資本Iからの期待限界税収」、第2項は「不確実パートからの限界税収をリスクの価格で評価したもの」となっている。Π^iはまた、定義の第2式から「資本収益税がない場合のリスク修正された割引率」－「資本収益税を考慮した場合のリスク修正された割引率」ともあらわせる。これらの点を考慮して、以下では、Π^iを資本Iからの（リスク修正した）限界課税収入と呼ぶ。

Π^iについての最適ルールが決定されれば、それに新たにm個の追加的な制約を加えることで、我々はm＋1個の最適税率を決定することが出来る。一つの現実的な制約は「確実性パートと不確実性パートのすべての税率が同じ」というものである。すなわち、$t^i = h^{i1} = \cdots = h^{ia} = \cdots = h^{im}$（$\vee i$）を仮定する。これは資本収益に関する最適税率が、不確実性に関係なく、事前に、決定されることを意味している。Zhu(1994)や Chari-Christiano-Kehoe(1994)では、非決定性の問題を回避するために、exante taxation という概念をあらたに定義して分析している。この概念はここで設けた仮定とは若干異なるものであるが、事前に最適税率が決定されるという点で同じものであり、したがって、彼等の分析結果と上記の仮定を課した場合の結果とは類似したものになる。われわれは後でこの点についてみる。

最適課税ルールの特徴付けに先だって、もう一つ変数を定義しよう。
$$v \equiv \left(-\frac{u_{cc}c + u_{cl}l}{u_c}\right)$$
この変数は、税による通時的な歪みの大きさにかかわるものである。このことは、先にも簡単に触れたが、(14)式を(2)と(22)を使って次のように変形するとよくわかる。

(24) $\quad p^k = l(1 - dv)$

ここでp^k / lは、社会と民間の資本の限界価値の比率であるから、この式は両者の比率がδvによって決定されることを意味している。δは歪みの価値を表す変数であり、vは通時的な歪みの大きさを規定する変数であると解釈することが出来る。

たとえば、もし一括税が可能であるなら、$-p^{b}=0$であるから、定義より$d=0$である。このとき(24)から社会と民間の資本の限界価値は一致する（$p^{k}=l$）。これは課税の歪みによるロスがまったくないことを意味している。

また、効用関数が分離可能であるような場合、$u_{cl}=0$となるから、vは異時点間代替の弾力性の逆数（あるいは相対的リスク回避度）と一致する。このことは歪みの大きさが、異時点間代替の弾力性（あるいは相対的リスク回避度）と深く関係していることを示唆している。この点はあとで詳しく見る。

今、vの low of motion を、$\dfrac{dv}{v}=m^{v}dt+\sum_{a}q^{va}dz^{a}$ と書こう。これは notation の簡単化のためであって、m^{v},q^{va} は、vの定義式を展開することによって、それぞれ

$$m^{v}=\left\{v_{c}cm^{c}+v_{l}lm^{l}+\sum_{a}(1/2)\left(v_{cc}\left(cq^{ca}\right)^{2}+2v_{cl}cq^{ca}lq^{la}+v_{ll}\left(lq^{la}\right)^{2}\right)\right\}\Big/v、$$

$$q^{va}=\left\{v_{c}cq^{ca}+v_{l}lq^{la}\right\}\Big/v$$

と決まる。ここで注意していただきたいのは、m^{v},q^{va} はともに消費と労働供給によって特徴付けられることである。あとに Theorem1 で見るように、最適課税ルールを特徴付ける際、（dv/v）が重要な役割を果たすが、この値は消費と労働供給の変動によって決定できる。

(24)式の変化率をとることによって、資本の「社会的限界価値の変化率」と「民間の限界価値の変化率」の差$\left(\dfrac{dp^{k}}{p^{k}}-\dfrac{dl}{l}\right)$を得ることが出来る。さらに、(6)(17)を利用することによって、Π^{i}が満たすべき最適課税ルールを以下のように特徴付けることが出来る。

Theorem **1**

$v\equiv\left(-\dfrac{u_{cc}c+u_{cl}l}{u_{c}}\right)$とし、その変化率を$\dfrac{dv}{v}=m^{v}dt+\sum_{a}q^{va}dz^{a}$ と書く。

さらに、$\hat{r}_{0}^{i}>0,\ \hat{q}_{0}^{kia}>0\ \ (\vee i,a)$を仮定する。

このとき任意の時間$t>0$について、資本k^{i}からの限界課税収入Π^{i}は

$$\Pi^{i}=c\left(\sum_{a}q^{kia}q^{va}+m^{v}+\sum_{a}\frac{H^{a}}{l}q^{va}\right)\qquad(25)$$

と特徴付けられる。

ただしここで $\boldsymbol{c} \equiv \dfrac{\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}$ であり、$-\dfrac{H^a}{\boldsymbol{l}} = -\left\{\dfrac{u_{cc}\boldsymbol{c}}{u_c}\boldsymbol{q}^{ca} + \dfrac{u_{cl}\boldsymbol{l}}{u_c}\boldsymbol{q}^{la}\right\}$ である。

証明

Lemma2 の結果 $\boldsymbol{dd}=0$ に注意して、(24)式の変化率をとると、

(26) $$\frac{dp^k}{p^k}-\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}=\frac{-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}\left(\frac{dv}{v}+\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}\frac{dv}{v}\right)$$

となる。これは、資本の「社会的限界価値の変化率」と「民間の限界価値の変化率」の差をあらわしている。

また、任意の資本 $i, j \in [1,2,\cdots,m]$ について、(16)の右辺 V/p^k を消去し、Π^i の定義とLemma1(21)を用いて整理すると、

(16a) $$f_i+\sum_a \frac{T^{ka}}{p^k}\boldsymbol{q}^{kia}-\frac{p^b}{p^k}\Pi^i = f_j+\sum_a \frac{T^{ka}}{p^k}\boldsymbol{q}^{kja}-\frac{p^b}{p^k}\Pi^j$$

を得る。この式を用いて(17)を整理すると、任意の $i \in [1,2,\cdots,m]$ を使って

(17a) $$\frac{dp^k}{p^k}=\left(\boldsymbol{r}-f_i-\sum_a \frac{T^{ka}}{p^k}\boldsymbol{q}^{kia}+\frac{p^b}{p^k}\Pi^i\right)dt+\sum_a \frac{T^{ka}}{p^k}dz^a$$

と書ける。また、(6)に(7)を代入して、Π^i の定義を考慮すると、

(6a) $$\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}=\left(\boldsymbol{r}-f_i-\sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{kia}+\Pi^i\right)dt+\sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}dz^a$$

と出来る。(26)に(17a)(6a)を代入して、$\dfrac{dp^k}{p^k}$ と $\dfrac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}$ を消去すると、

$$[(26)\text{式左辺}] = \left\{\sum_a\left(\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}-\frac{T^{ka}}{p^k}\right)\boldsymbol{q}^{kia}-\left(1-\frac{p^b}{p^k}\right)\Pi^i\right\}dt+\sum_a\left(\frac{T^{ka}}{p^k}-\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\right)dz^a$$

$$[(26)\text{式右辺}] = \frac{-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}\left(m^v+\sum_a\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)dt+\frac{-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}\sum_a \boldsymbol{q}^{va}dz^a$$

であるから、伊藤過程の一意分解性より、両辺の dt 項と dz 項を比較することで、

(27) $$\Pi^i=\frac{1}{1-\left(p^b/p^k\right)}\left\{\sum_a\left(\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}-\frac{T^{ka}}{p^k}\right)\boldsymbol{q}^{kia}-\frac{-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}\left(m^v+\sum_a\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)\right\}、$$

(28) $$\left(\frac{T^{ka}}{p^k}-\frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\right)=\frac{-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}\boldsymbol{q}^{va} \qquad \vee\, \boldsymbol{a}\in[1,2,\cdots,m]$$

を得る。(27)に(28)を代入すると(25)を得る。ただし $\boldsymbol{d}$ の定義と(24)より

$$\left(1-\frac{p^b}{p^k}\right)=\left(1-\frac{\boldsymbol{l}}{p^k}\frac{p^b}{\boldsymbol{l}}\right)=\left(1+\frac{\boldsymbol{d}}{1-\boldsymbol{d}v}\right)=\frac{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}{1-\boldsymbol{d}v}$$

であることを用いている。□

まず、Π^i は資産に関する初期条件と、資本の限界収益に関するショックの大きさ q^{kia} 、それに均衡での消費と労働の値によって決まることを確認しよう。（25）の右辺は d と q^{kia} 、v 、dv/v 、それに H^a/l で決まる。このうち q^{kia} は外生的に与えられるものである。d は公債(と資本)の初期保有量によって決定される。 v 、dv/v 、H^a/l は、先に見たように、消費と労働の均衡経路が決まれば決まる。

(25)式の意味を考えよう。
v が歪みの大きさを規定する変数であることは再三述べた。(25)を解釈する際は、さらに v が異時点間代替の弾力性の逆数に対応していることを思い出すと理解しやすい。
まず、右辺の $\left(m^v + \sum_a \frac{H^a}{l} q^{va}\right)$ は、v の（リスク修正された）成長率であり、それが大きいほど、資本収益への課税は大きい事をあらわしている。もし v が大きくなるなら（すなわち代替の弾力性が小さくなるなら）、より多くの課税をすることになる。なぜなら代替の弾力性が小さければ、多くの税を課したとしても、通時的な資源分配の変化は少なく、したがって課税による通時的な歪みが少なくなるからである。
また、$\sum_a q^{kia} q^{va}$ は v の変化率と資本収益の変化率との共分散である。資本 I 収益の変動が v に与える影響が大きいほど、異時点間代替に与える影響は大きくなり、したがって歪みも大きくなる。これを受けて、v の変化率と資本収益の変化率との共分散が大きいほど、資本 I からの収益への課税は大きくなる。ショックによって、より大きな歪みをもたらす資本の保有量を減らすように課税されるわけである。
c は課税率の大きさを決定している。d が大きいほど（公債残高が大きいほど）課税額は大きくなる。

Remark：(25)において、もし $d=0$ や $(dv/v)=0$ であるなら、$\Pi^i=0$ となる。$d=0$ は税による歪みの存在しない状況、すなわち一括税が利用可能な状況に対応する。また、$(dv/v)=0$ は、たとえば、効用関数が c と l に関して同次であるようなケースに対応する。

Remark：もし、効用関数が分離可能であるならば、Π^i の値は、労働から独立し、消費の均衡経路と d によって決まることになる。これは v やリスクの価格が消費で評価できるからである。したがって、C-CAPM とのアナロジーで言えば、消費（労働）をベースとした最適課税の特徴付け、といえなくもない。この点は、次にみる例の(30)によってより明らかになるであろう。

Remark：リスクの社会的価値$\left(T^{ka}/p^{b}\right)$は、(28)から、リスクの価値$\left(H^{a}/l\right)$に$\dfrac{dv}{1+dv}q^{va}$を付加したものとして決まる。リスクの社会的価格も、やはり消費と労働によって決まっている。もし、$(dv/v)=0$や、一括課税が利用可能で$d=0$であるなら、リスクの社会的価値$\left(T^{ka}/p^{b}\right)$とリスクの価値$\left(H^{a}/l\right)$は一致する。

Remark：Theorem1 の証明において、注目していただきたいのは(26)式である。
この式は(24)の変化率をとることで得られるが、資本の「社会的限界価値の変化率」と「民間の限界価値の変化率」の差を現している。 この差は(26)では(dv/v)のみに大きく依存するが、これは Lemma2 より$(dd/d)=0$であることによっている。(dd/d)が0でないケースについては、Section5 において発展的なケースとして分析する。

一つの例
つぎに、効用関数を特定化することによって、vを具体的に消費によってあらわしてみよう。これによって、Π^{i}の特徴付けに関するより直感的な理解が得られるはずである。

例：効用関数を以下のように特定化する。
瞬時的効用関数が分離可能であり､かつcに関して絶対的リスク回避度が一定であるとする。すなわち$u(c,l)\equiv\left\{1-\exp(-g\,c)\right\}+h(l)$という場合を考える。ここで$h(\cdot)$は$l$に関して concave であり、絶対的リスク回避度gは正の定数である。

このモデルでは、 効用関数が分離可能であるため、vは消費のみから決まり、相対的リスク回避度と一致する。その値は$v=g\,c$となる。さらに絶対的リスク回避度が一定であることを考慮すれば、$(dv/v)=(dc/c)$が成立している。すなわちvの変化率はcのそれと一致する。故に$m^{v}=m^{c}$, $q^{va}=q^{ca}\quad\vee a$である。

また、リスクの価格は(8)から$\left(-H^{a}/l\right)=g\,c\,q^{ca}\quad\vee a$となり、リスクプレミアムは、これを用いて$\sum_{a}-\dfrac{H^{a}}{l}q^{kia}=g\,c\sum_{a}q^{ca}q^{kia}$とかける。すなわち相対的リスク回避度$g\,c$と消費の成長率と資本の成長率の瞬時的共分散$\sum_{a}q^{ca}q^{kia}$から決まることが確認できる。また、リスクプレミアムは正であるから、均衡経路上において消費と資本の共分散$\sum_{a}q^{ca}q^{kia}$も正であることが分かる。これは、資本からの収益率の増加は必ず瞬間的な消費量を増加させることを意味している。

資産の裁定式(7)は、これをもちいて $\hat{r}^{i} - g\,c\sum_{a} q^{ca} q^{kia} = r^{b}$ となる。すなわち、資本からの収益の変動が消費に大きな影響を与えるほど、また相対的リスク回避度が大きいほど、リスクプレミアムは大きくなる。

さて、この関数系おける Π^{i} の特徴づけを見よう。つぎの(25a)では、v の変化率ではなく、消費 c の変化率によって Π^{i} が特徴付けられるために、その解釈がより容易になる。

Corollary1
効用関数を $u(c,l) \equiv \left\{1-\exp(-g\,c)\right\} + h(l)$ と特定化すると、(25)は以下のように書ける。

$$\text{(25a)} \qquad \Pi^{i} = c\left(\sum_{a} q^{kia} q^{ca} + m^{c} - g\,c\sum_{a}\left(q^{ca}\right)^{2}\right) \qquad \vee i$$

ただしここで $c \equiv \dfrac{dg\,c}{1+d-dg\,c}$ である。

(25a)を解釈すると、リスク修正した消費の成長率 $\left(m^{c} - g\,c\sum_{a}\left(q^{ca}\right)^{2}\right)$ が大きいほど課税収益は大きくなることがわかる。消費の成長率が大きいのは、資本蓄積がまだ十分に進んでいない状況である。このとき成長資本をより必要としているので、資源の異時点間代替の弾力性は小さい。すなわち仮に多くの資本所得課税を課しても、資源分配に大きな影響はもたらさない。したがって資本収益に関する最適課税額は大きくなる。この結果は決定論的なモデルにおいて良く知られた結果と一致する。
また、資本収益ショックが消費に大きな影響を与える（すなわち共分散が大きい）資本ほど課税額が大きくなることが分かる。これはショックが大きな歪みをもたらすような資本ほどその保有量を小さくするように課税されることを意味する。

資本間の最適課税ルール

次に、資本間の課税ルールの関係を見てみよう。結果から見ていく。

Theorem2
$\hat{r}_{0}^{i} > 0,\ \hat{q}_{0}^{kia} > 0\ (\vee i, a)$ を仮定する。このとき任意の時間 $t > 0$ と任意の資本 $i, j \in [1,2,\cdots,m]$ について、つぎの関係が成立する。

$$\text{(30)} \qquad \Pi^{i} + \left(\frac{-dv}{1+d-dv}\right)\sum_{a} q^{va} q^{kia} = \Pi^{j} + \left(\frac{-dv}{1+d-dv}\right)\sum_{a} q^{va} q^{kja}$$

さらに、資本$s \in [1,2,\cdots,m]$が安全資産であるとしよう。そして、その資本ｓからの限界課税収入をΠ^sと書くと、任意の資本$i, j \in [1,2,\cdots,m]$について

(31) $$\left(\Pi^i - \Pi^s\right) = \frac{\sum_a \boldsymbol{q}^{va}\boldsymbol{q}^{kia}}{\sum_a \boldsymbol{q}^{va}\boldsymbol{q}^{kja}}\left(\Pi^j - \Pi^s\right)$$

が成立する。ただしここで$\Pi^s = f_s - r^b$となる。

証明：(25)より、任意の任意の資本$i, j \in [1,2,\cdots,m]$について、$\left(m^v + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{q}^{va}\right)$を消去すると(30)が成立する。
また、資本$s \in [1,2,\cdots,m]$が安全資産であるとすれば、$\boldsymbol{q}^{ksa} = 0$であり、(7)より$\hat{r}^s = r^b$であるから、$\Pi^s = f_s - r^b$である。資本iと資本sに関する(30)式から
$\Pi^i - \Pi^s = -\left(\frac{-\boldsymbol{d}v}{1+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}v}\right)\sum_a \boldsymbol{q}^{va}\boldsymbol{q}^{kia}$ である。資本jと資本sについても同様の式を求め、これらの式の比率を取ると(31)が得られる。□

(30)(31)ともに、リスクを持つ資本間の最適課税ルールを表している。
(31)は「安全資産からの課税収益」と「各資本からの課税収益」の差を規定したものとなっており、CAPMと比較すると、その類似性が見とめられるだろう。
(30)(31)からわかることは、資本収益率の変動がvの変動率に大きな影響を与える資本ほど、すなわち共分散$\sum_a \boldsymbol{q}^{va}\boldsymbol{q}^{kia}$が大きな資本ほど、$\Pi^i$がおおきくなるということである。つまり、資本収益の変動により、大きな歪みをもたらすような資本には高額の課税を課し、保有量を抑えるのが最適となる。特に(31)は、「安全資産からの限界課税収入」と「各資本からの限界課税収入」の差の比率が、各資本の収益率の変動とｖの変動率の共分散で決定されることをあらわしている。

最後に、先ほどの例における、(31)を見てみよう。
すなわち瞬時的効用関数を$u(c,l) \equiv \{1-\exp(-g\,c)\} + h(l)$と仮定する。このとき (31)は以下のようになる。

Corollary2
効用関数を$u(c,l) \equiv \{1-\exp(-g\,c)\} + h(l)$と特定化する。
さらに、資本$s \in [1,2,\cdots,m]$が安全資産であるとして、その資本ｓからの限界課税収入をΠ^sと書くと、任意の資本$i, j \in [1,2,\cdots,m]$について

(31a) $$\left(\Pi^{i}-\Pi^{s}\right)=\frac{\sum_{a} q^{ca} q^{kia}}{\sum_{a} q^{ca} q^{kja}}\left(\Pi^{j}-\Pi^{s}\right)$$

が成立する。ただしここで$\Pi^{s}=f_{s}-r^{b}$となる。

比較するとq^{va}がq^{ca}で直接あらわされている。解釈すると、これは資本収益率の変動が消費の成長率に与える影響が大きな資本ほど、その資本からの限界課税収入Π^{i}（$\vee i$）がおおきくなるということである。この例では、「安全資産からの限界課税収入」と「各資本からの限界課税収入」の差の比率は、各資本の収益率の変動と消費の変動率の共分散で決定されている。

４、 Specific Utility Functions

以上では、より一般的な仮定のもとで最適資本課税の公式を導出した。そこでは効用関数には非常に一般的な仮定しか課されていなかった。前 Section の最終部において、われわれは直感的な理解を得るために効用関数をある形に特定化した。この Section でも、引き続き、効用関数を特定化する。これによって、最適資本課税の公式がどのような意味を持ってくるのか見てみたい。直感的な理解を促すとともに、最適課税ルールとリスク分散の関係について、さらに進んだ分析を行うことが、この Section の一つの目的である。

より進んだ分析とは、具体的には以下のようなものである、

１、数値的な分析や解釈がより容易になるように、Π^{i}（$\vee i$）に関する近似式を導出する

２、定常分布上でのΠ^{i}（$\vee i$）の分散が何によって決まるかを調べる

この Section では、前 Section で見た効用関数のほかに、２つの代表的な効用関数を扱う。我々の最適資本課税公式において、vの役割は非常に重要であったけれど、このvの値は効用関数の形によって大きく異なる。以下の分析では、効用関数によって、vがどのように特定化されるのかといった点に注目していただきたい。

この Section のもう一つの重要な目的は、我々の公式が既存の主要な結果と整合的であることを確認することである。イントロダクションでも触れたように、我々の定式化が有用であるためには、既存の結果を包含することがひとつの条件となる。この点をこの Section で確認しておきたい。

この Section において、われわれが取り上げる既存の主要結果とは、Chamley(1986), Judd(1985), Zhu(1992), Chari-Christiano-Kehoe(1994)で得られた以下の性質である。

１、決定論的な状況では定常状態において最適資本課税は０である（Chamley(1986), Judd(1985)）
２、消費と労働に関して Homogeneous な効用関数において、最適資本課税は常に０である（Zhu(1992)）
３、分離可能であり、かつ消費に関して Homogeneous な効用関数において、最適資本課税は常に０である（Zhu(1992)）
４、定常分布上において、最適資本課税の値は０ではないが、非常に小さい（Chari-Christiano-Kehoe(1994)）
５、最適資本課税の分散はリスク回避度が大きいほど、大きい（Chari-Christiano-Kehoe(1994)）
ただし、４、５、に関しては Chari-Christiano-Kehoe(1994)は数値計算によって分析している。これは、離散モデルにおいては、一般に高次モーメントを明示的に扱えないため、分散に関する解析的な分析が難しく、シミュレーションに頼らざるを得ないためである。しかし Campbell(1994)も指摘しているように、シミュレーションによる分析では、最適課税に影響を与えるすべての要因を特定できないし、比較静学的な分析も出来ない。我々は、何が、どのように、最適課税の分散を決定しているのかを解析的な手法で明らかにしよう。

我々の定式化が、既存の結果を再現でき、かつ既存の結果以上の分析も出来ることを、この Section ではアピールしたい。

４－１　不確実性がない場合

まず、決定論的な場合を考えよう。このとき$q^{kia} = q^{va} = 0$を代入すると、公式（25）は

(25b)　$\Pi^i = c\, m^v \qquad \vee i \in [1,2,\cdots,m]$

となり、vの（期待）成長率が最適課税ルールΠ^i（$\vee i$）を決定する事がわかる。また、このときΠ^i（$\vee i$）は定義より$\Pi^i \equiv t^i f_i$である。定常状態ではvの（期待）成長率は 0 であるから、(25b)より$\Pi^i = 0$（$\vee i$）である。資本の限界生産性は定常状態において（特別な場合を除いて）正であるから、$\Pi^i = 0$（$\vee i$）は最適資本税率$t^i = 0$（$\vee i$）を意味する。これはよく知られた結果である（上記 1 の結果）。
また、不確実性がない場合、各資本からの（期待）収益率は等しいはずであるから、当然各資本への最適課税率も等しくなる。
以上をまとめる。

Corollary3
不確実性のないケース$q^{kia} = q^{va} = 0$において、上記(25)は以下のように特定化される。

(25b)　$\Pi^i = c\, m^v \qquad \vee i \in [1,2,\cdots,m]$

また、定常状態において$\Pi^i = t^i = 0$（$\vee i$）が成立する。

４－２　homogeneous utility function

次に、瞬時的な効用関数が消費と労働に関して homogeneous of degree h（ただしｈは任意の整数）であるか、あるいは消費と労働に関して分離可能であり、かつ消費に関して homogeneous of degree hである場合を考えよう。このケースでは(dv/v)はつねに０となる。すなわちvは資本蓄積に関わらず常に一定である。Lemma2 よりδも常に一定であるから、これは課税による歪みdvが通時的に一定であることを意味している。従って、最適課税率は常に一定となる。ただし、政府支出は有限であるから、横断条件と合わせると、最適課税率は常に０でなくてはならない（上記２、３の結果）。

以上を公式から確認しよう。

vの定義より、効用関数が homogeneous of degree hならば$v = h-1$となる。hはコンスタントであるから、vもコンスタントである。したがって$m^v = q^{va} = 0$（$\vee a$）である。

これらを（25）に代入すると

(25c)　$\Pi^i = 0 \qquad \vee i \in [1,2,\cdots,m]$

がわかる。上述の非決定性により課税率の組合せは一意には決まらないが、上式は資本 I からの限界課税収入が常に 0 であることを意味している。

もし、課税率に関して、追加的に$t^i = h^{i1} = \cdots = h^{ia} = \cdots = h^{im}$という仮定を課せば、最適課税率は全て０となる。この仮定は課税率が事前に決定されるケースを意味している。このことは先に見た。

まとめよう。

Corollary4

瞬時的な効用関数を

(1)消費と労働に関して homogeneous of degree h であるか、

(2)あるいは消費と労働に関して分離可能であり、かつ消費に関して homogeneous of degree h であると仮定する。このとき(25)は以下のように特定化される。

(25c)　$\Pi^i = 0 \qquad \vee i \in [1,2,\cdots,m]$

さらに課税率$t^i = h^{i1} = \cdots = h^{ia} = \cdots = h^{im}$という仮定を課せば、最適課税率は全て０である。

４－３　分離可能であり、絶対的リスク回避度が一定

瞬時的な効用関数が消費と労働に関して分離可能であり、かつ消費に関して絶対的リスク回避度が一定である場合を考えよう。具体的には$h(\cdot)$はlに関して concave であるとして

$u(c,l) \equiv \{1-\exp(-g\,c)\} + h(l)$ とする。ただしここで $-g$ は絶対的リスク回避度を表し、正の定数である。この関数系は前 Section でも見た。扱いやすく、また結果の直感的な解釈も容易であるという利点を持っている。前節でも言及したが、分離可能性を仮定することにより、最適課税ルールは労働から独立に決定できる。

この関数系において、(25)(31)のルールがどのようになるかは、すでに前節で見た（Corollary1、2）。ここでは、さらに進んで Π^i（$\vee i$）の近似式を導出しよう。もっともらしい仮定のもとで、近似式を導出することで、実証的にも、解析的にも、より使いやすいルールが得られるだろう。近似によって得られたルールを、ここでは最適課税ルールの分散を分析するために使おう。

追加的な仮定をおく。
仮定：δ、および消費成長率のボラティリティ q^{ca} が十分小さい。

δが十分小さいというのは、最適課税論の文脈では、しばしば用いられる前提である。公債残高が非常に大きくない限りこの仮定はもっともらしいであろう。また、消費成長率のボラティリティが資本の限界収益率のボラティリティにくらべて小さいものであることは、数値的な分析においてよく知られたところである。

この仮定を認めると、（25a）は以下のように近似できる。

$$(25a)' \qquad \Pi^i \cong d g c\left(\sum_a q^{kia} q^{ca} + m^c\right) \qquad \vee i$$

この式と（25a）を比較すると、c が $-dg\,c$ とよりシンプルになり、さらに消費成長率のボラティリティによる項が消えている。この式から、Π^i（$\vee i$）は、歪みの価格δ、相対的リスク回避度ｒｃ、消費の期待成長率 m^c、それに消費成長率と資本収益率との共分散 $\sum_a q^{kia} q^{ca}$ から決定され、それぞれが大きいほど Π^i（$\vee i$）も大きくなることがよりはっきりとわかる。また、この近似式を使って定常分布上での条件付分散をもとめる（ただし invariant measure が存在すると仮定する）と、d が大きいほど（すなわち初期時点での公債比率が大きいほど）、絶対的リスク回避度 g が大きいほど、消費 c が大きいほど、Π^i の分散は大きくなることが分かる。

４－４　異時点間代替の弾力性が一定

最後に、異時点間代替の弾力性が一定の効用関数

$$u(c,l)=\frac{\left(c^{s}\left(1-l\right)^{1-s}\right)^{1-g}}{1-g}\qquad g\neq 1,\ g>0\quad const.$$

を考えよう[17]。この関数系は解析的にはそれほど扱いやすいものではないが、数値的な分析において頻繁に使用されているので、そこでの結果と比較するために、ここで計算してみよう。この関数系による分析で特徴的なのは、最適課税ルールΠは、消費量よりも労働供給量に大きく依存するという点である。この点は先の Subsection ４－３で扱った関数系での結果とまったく反対である。Chari-Christiano-Kehoe(1994)はこの関数系を用いたシミュレーション分析によって、最適資本課税率は定常分布上において非常に小さきことを示しているが、これは労働供給の分散が、消費のそれよりも非常に小さいというよく知られた事実によっている可能性がある。もし、最適資本課税ルールが消費によっても影響を受けるような関数系であれば、この結果はもう少し違ったものになるかもしれない。

この関数系では v は $v=g+\left\{(1-s)(1-g)\right\}\frac{1}{1-l}$ となり、変化率を取ると

$$\frac{dv}{v}=\frac{l}{(1-l)^{2}}\frac{(1-s)(1-g)}{v}\left[\left\{m^{l}+\frac{1}{1-l}\sum_{a}\left(q^{la}\right)^{2}\right\}dt+\sum_{a}q^{la}dz^{a}\right]$$

である。したがって

$$m^{va}=\frac{l}{(1-l)^{2}}\frac{(1-s)(1-g)}{v}\left\{m^{l}+\frac{1}{1-l}\sum_{a}\left(q^{la}\right)^{2}\right\}$$

$$q^{va}=\sum_{a}\frac{l}{(1-l)^{2}}\frac{(1-s)(1-g)}{v}q^{la}$$

である。また、リスクの価格は(8)より

$$-\frac{H^{a}}{l}=-\left\{\left(s(1-g)-1\right)q^{ca}-\frac{l}{1-l}(1-s)(1-g)q^{la}\right\}$$

となるから、これらを使うと(25)(31)の公式は以下のようになる。任意の $i,j\in\left[1,2,\cdots,m\right]$

(25d) $$\Pi^{i}=\frac{d}{1+d-dv}\frac{l}{(1-l)^{2}}(1-s)(1-g)\left\{\sum_{a}q^{kia}q^{la}+m^{l}+\frac{l}{1-l}\sum_{a}\left(q^{la}\right)^{2}\right.$$
$$\left.+\sum_{a}\left(s(1-g)-1\right)q^{ca}q^{la}-\frac{l}{1-l}\sum_{a}(1-s)(1-g)\left(q^{la}\right)^{2}\right\}$$

[17] $g=1$ のときこの効用関数は $u(c,l)=s\log c+(1-s)\log l$ となり、Section4-2 Corollary4(2)のケースとなる。

(31d) $\quad \left(\Pi^{i}-\Pi^{s}\right)=\dfrac{\sum_{a} q^{la} q^{kia}}{\sum_{a} q^{la} q^{kja}}\left(\Pi^{j}-\Pi^{s}\right)$

とくに、(31d)は各資本への最適課税異比率が、各資本の収益率へのショックが労働供給の成長率にどれだけ大きな影響を与えるか（共分散）で決まっいる。すなわち、資本収益率の変動が労働供給の成長率に大きなショックを与えるような資本には多くの課税が課されることになる。先の Corollary2 (31a)では、労働供給の成長率ではなく、消費の成長率にどれだけ影響を与えるかで決まっていたから、この点は対照的である。

次に、Π^{i} （$\vee i$ ）に関する近似式を導出する。
先ほどと同様に、追加的な仮定を置こう。
仮定：δ、および労働供給の成長率のボラティリティ q^{la} が十分小さい。

ここでは労働供給の成長率のボラティリティ q^{la} が十分小さいと仮定したが、この点も消費の場合と同様に、資本利益率の変動に比較して小さいことが知られている。
この仮定のもとで、Π^{i} （$\vee i$ ）は以下のように近似できる。

(25d)´ $\quad \Pi^{i} \cong d(1-s)(1-g)\dfrac{l}{(1-l)^{2}}\left\{\sum_{a} q^{kia} q^{la}+m^{l}+\sum_{a}\left(s(1-g)-1\right) q^{ca} q^{la}\right\}$

これを使って、Π^{i} （$\vee i$ ）の分散を調べると、dが大きいほど（すなわち初期時点での公債比率が大きいほど）、リスク回避度$|1-g|$が大きいほど、消費cが大きいほど、Π^{i}の分散は大きくなることが分かる。Chari-Christiano-Kehoe(1994)の数値分析でえられた重要な結果の一つは、リスク回避度$|1-g|$が大きいほど最適課税率は大きくなるということであるが、このことは(25d)´からも確認できた。

５、　発展的な 2 つの話題

以上では、我々の公式が、既存の主要結果と整合的であり、かつ高次モーメントを明示的に扱えるために、さらなる分析が可能になることを確認した。たとえば、Section3 でおこなった多資本モデルの分析や、Section4 でおこなったΠ^{i}の分散分析は、まさにこの利点を利用したものであった。

この Section では、我々の定式化がさらに発展的な可能性を持つこと、すなわち、より現実的で複雑なモデルの分析に拡張できることをアピールしたい。いくつかの発展的なテーマが考えられるが、ここでは次の 2 つのケースについて、最適課税ルールがどのように変更されるかを見ておきたい。

第一のケースは、政府と代表的消費者が異なるリスクに直面しているようなケースである。ここでは、特に、民間がブランチャード流の生存不確実性に直面しているような状況を考える。このモデルは、現実との関係で非常にもっともらしいだけでなく、OLG モデルと Dynasty モデルとのあいだをつなぐという点で理論的にも重要である。政府と代表的消費者が異なるリスクに直面しているケースとしては、そのほかにも、たとえば政府と民間でショックに対する情報が異なるような状況が考えられる。このケースも非常に重要で、さらなる発展の可能性を持つと思われるが、これは今後の課題にしたい。

第二のケースは、外部性が存在する場合である。決定論的な分析では、外部性は他の資本の（期待）収益率に影響を与えるものとして定式化されるのが一般的であるが、ここでは不確実なパート、すなわち資本収益の分散の大きさに影響を与えるものして分析する。これは、たとえば、ある資本収益の変動が他の資本の技術革新によって影響を受けるような場合である。

興味深いのは、この Section で扱われるようなケースにおいては、たとえ定常分布上に経済があるときでも、最適資本課税は決して小さな値ではないということである。Chari-Christiano-Kehoe(1994)の数値的分析における最も重要なポイントは、「定常分布上において、最適資本課税率は０ではないが、非常に小さい」という点であった。つまり彼等の分析は、不確実性下においても決定論的なモデルによる有名な結果（0 課税定理）がベンチマークとして有効である事を示唆していた。この Section における分析は、Chari-Christiano-Kehoe(1994)の分析が限定的なものであることを主張する。彼等の結果は、この Section で扱われるような、より現実的で、発展的なモデルにおいては成立しない[18]。

この Section で扱われるケースでは、代表的消費者と政策決定者（社会全体）の直面するリスクや操作変数が異なることになる。政策決定者は、この点を考慮して、リスクや操作変数の非対称性を修正するように課税率を決定することになる。ただし、課税による歪みは考慮

[18] 最適資本課税が大きくなるようなケースとしては、その他に、代表的消費者が借り入れ制約に直面しているような状況も考えられる。このケースは Aiyagari(1995)が離散モデルで分析しているが、我々のモデルにおいてもこの結果を確認することは容易である。
最適資本課税が正になるのは、借り入れ制約を課すことで現時点での消費が抑えられるために、資本蓄積を抑制し消費を促すのが最適となるためである。具体的な証明のポイントは、５－１と同様に、このようなケースではδが一定ならないという点である。すなわち借り入れ制約に浴することのコスト（借り入れ制約のラグランジュ乗数に対応）の分だけδが増加することになる。

される。

５－１　Lifetime Uncertainty

この節では代表的消費者が Lifetime Uncertainty に直面しているような状況を考えよう。代表的消費者は、毎時ある確率εで死亡するものとする。また、同じ確率で新しい世代の消費者が誕生するものとする。死亡した消費者の資産はそのまま新しい消費者に移転される。社会全体でみれば、したがって何ら人口成長はなく、これまでの基本ケースと同じである。ただし、代表的消費者には、これまでの資本保有リスクのほかに、「死亡」という新たなリスクが加わることになる。したがってこの場合、代表的消費者と政策決定者（社会全体）の直面するリスクが異なることになる。消費者は死亡するリスクがあるために、基本ケースと比較すると、当期の消費を増やし、資産を保有しないように行動する。政策決定者は消費者のこのような行動を予測して、社会的な最適化のために、なるべく資産を保有させるように政策を決定する。すなわち税制による優遇措置をとることになる。

この節の証明のポイントは、δが一定にならないことである。これによって(24)式が基本ケースとは異なることになる。また、瞬時的効用関数が Homogeneous で、したがってｖの変化率が一定な場合においても、δが通時的に変化するために、δｖは一定にならない。これは課税による歪みの大きさが、通時的に一定ではないということなので、これに対応して最適課税率も一定（すなわち０）でなくなる。

モデルを設定しよう。 Lifetime Uncertainty はブランチャードに習って定式化する。具体的には、代表的消費者は次の予算制約式に直面するとしよう。

(LU 1)　$$da = \left\{ \sum_i \hat{r}^i f^i a + \hat{w} l + r^b f^{m+1} a - c \right\} dt + \sum_i \sum_a \hat{q}^{kia} f^i a \, dz^a + dq$$

ここで q はポアソン過程

$$dq \equiv \begin{cases} 0 \quad with\ probablity \quad (1-e)dt \\ -a \quad with\ probablity \quad e dt \end{cases}$$

であるとする。個人はε>0 の確率で死亡しその時点で保有する資産をすべて失うとし、その資産は新たに生まれる世代に一括移転されるとする。

この予算式を使って、代表的消費者の問題は

$$Max \quad U \quad s.t. \ (LU\ 1), \ \vee i \ \ k^i(0) = k_0^i, \ \ b(0) = b_0, \ \ \sum_j^{m+1} f^j - 1 = 0$$

と修正され、一般化されたハミルトニアンも

$$Hamiltonian = u(c.l) + \ l\left\{\sum_i \hat{r}^i f^i a + \hat{w}l + r^b f^{m+1} a - c\right\}$$
$$+\sum_i \sum_a H^a \hat{q}^{kia} f^i a\, dz^a \ + z\left(1 - \sum_j^{m+1} f^j\right) - e \ l \ a$$

と修正される。これまでの基本ケースと比較すると、 Lifetime Uncertainty による $-e \ l \ a$ が、新たに付け加わっている。これは、死亡することによって失う資産価値の期待値である。

この一般化されたハミルトニアンを使って、問題を解くと、資産価値λは以下のプロセスに従わなくてはならないことがわかる。

(LU 6) $$\frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} = \left\{(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{e}) - r^b\right\}dt + \sum_a \frac{H^a}{\boldsymbol{l}} dz^a$$

この式を基本ケース(6)と比較すると、期待割引率がεだけ大きくなっていることが分かる。すなわち資本保有の価値は毎時期待死亡確率εのぶんだけ､基本ケースに比較して小さくなる。

政策決定者の意思決定問題は基本ケースと同様である。

上記の（LU6）によって、Lemma2 は次のように変化する。

(LU 23) $$\frac{d\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} = -\boldsymbol{e}\, dt$$

すなわち、このモデルでは租税の歪みによるロスが、通時的に一定ではなく、一定の割合εで低下するように、租税率が決定されるのが最適となることを上式は意味している。これは、先ほども言ったように、リスクの非対称性によって、社会全体の最適よりも、代表的消費者がより近視眼的に行動することになるからである。これを修正するために、最適課税率は、より資産保有を増やすように決定されることになる。

δが一定でないので、(26)は

(LU 26) $$\frac{dp^k}{p^k} - \frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} = \frac{-\boldsymbol{d}v}{1 - \boldsymbol{d}v}\left(\frac{d\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} + \frac{dv}{v} + \frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}\frac{dv}{v}\right)$$

となる。基本ケースの場合と同様に、（LU26）に（LU6）と(17a)を代入し、さらに(LU23)を加味することで以下が得られる。

Theorem3

代表的消費者はεの確率で死亡し、同じ確率で新しい世代が生まれている経済を考える。また、死亡した消費者の資産は新しく生まれた消費者に一括移転されるものとする。

このとき任意の i について、資本 k^i からの最適限界課税収入 Π^i は

(LU 25) $\Pi^{i} = c\left(\sum_{a} q^{kia} q^{va} + m^{v} + \sum_{a} \frac{H^{a}}{l} q^{va}\right) - ce$

と特徴付けられる。

ただしここで $c \equiv \dfrac{dv}{1+d-dv}$ であり、$-\dfrac{H^{a}}{l} = -\left\{\dfrac{u_{cc}c}{u_{c}} q^{ca} + \dfrac{u_{cl}l}{u_{c}} q^{la}\right\}$ である。

Theorem3 を基本ケースの Theorem1 と比較すると、あらたに $-ce$ が加わっている。これが、「死亡リスク」の存在によるリスクの非対称性を修正するための、租税の変化分である。χ は最適課税を決定する上でεをどれだけ考慮するかを評価しており､課税による歪みを考慮した値になっている。そして租税は、代表的消費者が近視眼的に行動することを抑制するように、すなわち資本蓄積を促すように、修正されている。

例：Homogeneous Utility function

前 Section で見たように、効用関数が消費と労働に関して homogeneous of degree h ならば、基本ケースにおける最適資本課税は常に０であった｡しかしここではδが一定ではないので、これは成立しない。(LU 25)を使うと、$(dv/v) = 0$ のとき、$\Pi^{i} = -ce$ となる。

つまり、毎期一定金額だけ資本に補助金を出すことになる。そしてその値は、死亡確率が高いほど、δが大きいほど、ｈが大きいほど、大きくなる。

５－２　外部効果

次に、代表的個人の直面するリスクが、経済全体の活動に左右されているような状況を考える。たとえば、技術革新による生産性ショックの大きさが、全体の活動に依存するような場合である。

外部性が存在する場合､最適政策はその外部性を除去するように決定されることはよく知られている。われわれの分析においても、このことはそのまま当てはまる。ただし、我々の分析では、期待利益率ではなく、リスクに外部性が加わるものとして分析する。この点が決定論的なモデルによる既存の研究とは異なる｡リスクに加わる外部性が最適政策を決める上で､どのように評価されるのかを見てみたい。

具体的には、次のように設定する。k^{a} を一人当りの average の資本蓄積量として、資本 I からの課税後の資本収益が

$$\hat{r}^{i} k^{i} dt + \sum_{a}^{m} \hat{q}^{kia}\left(k^{a}\right) k^{i} dz^{a}$$

と書けるとする。ここで $\hat{q}^{kia}\left(k^{a}\right)$ は生産性ショックが全体の資本蓄積量の関数であることを示す。たとえば、技術革新が社会全体の（人的）資本蓄積によっているような場合を想定

している。
このような外部性のモデルでは、k^a は代表的個人の意思決定では操作可能変数にはならないが、政策実行者の意思決定では操作可能変数となる点が分析のポイントとなる。代表的個人の意思決定問題は、したがって、基本ケースとまったく同様である。政策決定者の問題では、k^a の変化が $\hat{q}^{kia}\left(k^a\right)$ に与える影響を新たに考慮する必要がある。

具体的には、$\left(¶\hat{q}^{kia}/¶k^a\right)=\hat{q}_a^{kia}$ と書くと、基本ケースの(17)式が次のように修正される。

(E17)
$$\frac{dp^k}{p^k}=\left[r-f_i-\sum_a\frac{T^{ka}}{p^k}q^{kia}-\frac{p^b}{p^k}\left\{\left(\hat{r}^i-f_i\right)+\sum_a\frac{T^{ba}}{p^b}\left(\hat{q}^{kia}-q^{kia}\right)\right\}\right]dt$$
$$-\left\{\sum_a\left(\frac{T^{ka}}{p^b}-\frac{p^b}{p^k}\frac{T^{ba}}{p^b}\right)\sum_i j^i k q_a^{kia}\right\}dt+\sum_a\frac{T^{ka}}{p^b}dz^a$$

Lemma1,2 はここでもそのまま成立する。(21)を加味すると、基本ケースの(27)は以下のようになる。

(E 27)
$$\Pi^i=\frac{1}{1-\left(p^b/p^k\right)}\left\{\sum_a\left(\frac{H^a}{l}-\frac{T^{ka}}{p^k}\right)q^{kia}-\frac{dv}{1+dv}\left(m^v+\sum_a\frac{H^a}{l}q^{va}\right)\right\}$$
$$-\sum_a\frac{H^a}{l}\sum_i j^i k q_a^{kia}-\frac{1}{1-\left(p^b/p^k\right)}\left\{\sum_a\left(\frac{T^{ka}}{p^b}-\frac{H^a}{l}\right)\sum_i j^i k q_a^{kia}\right\}、$$

基本ケースと比較すると、第 2、3 項が新たに加わる。第 2 項は、代表的消費者の直面する割引率を社会のそれに修正するための税金の導入分、第 3 項はその税の導入による歪みの調整である。基本ケースの(28)はそのまま成立するから、（E27）にこれを代入して整理すると、以下の公式を得る。

Theorem4
k^a を一人当りの average の資本蓄積量として、資本 I からの課税後の資本収益が
$\hat{r}^i k^i dt+\sum_a^m\hat{q}^{kia}\left(k^a\right)k^i dz^a$ で与えられるとする。
このとき任意の i について、資本 k^i からの限界課税収入 Π^i は

(E 25)
$$\Pi^i=c\left(\sum_a q^{kia}q^{va}+m^v+\sum_a\frac{H^a}{l}q^{va}\right)$$
$$-\sum_a\frac{H^a}{l}\sum_i j^i k q_a^{kia}+c\sum_a\sum_i j^i k q^{va}q_a^{kia}$$

と特徴付けられる。

ただしここで $c \equiv \dfrac{dv}{1+d-dv}$ であり、$-\dfrac{H^a}{l} = -\left\{ \dfrac{u_{cc}c}{u_c} q^{ca} + \dfrac{u_{cl}l}{u_c} q^{la} \right\}$ である。

すなわち、ここで Π^i （$\vee i$）は、代表的消費者の直面するリスク（リスク修正した割引率）と、社会全体のリスク（リスク修正した割引率）の違いを埋めるように課税される。たとえば、資本収益率のボラティリティが全体の活動に従って増えるような場合、すなわち $\hat{q}_a^{kia} > 0$ のような場合、資本のリスク修正した利益率は外部性によって減るわけであるから、その分だけ課税は優遇されることになる（反対の場合は重く課税される）。そして、その値は（E25）の第 2、3 項で与えられる。第 2 項は資本収益率リスクの外部性による変動分 $\sum_i j^i k q_a^{kia}$ をリスクの価格 $-\dfrac{H^a}{l}$ で評価したものであることが分かる。また、第 3 項は修正のための課税分に対応する歪みの調整項である。

例：Homogeneous Utility Functions
前節とどうように、効用関数が消費と労働に関して homogeneous of degree h の場合を見てみよう。$(dv/v) = 0$ を考慮すれば、上記(E 25)は $\Pi^i = -\sum_a \dfrac{H^a}{l} \sum_i j^i k q_a^{kia}$ となる。
つまり、外部性によるリスク修正された資本収益の変化分だけ課税が調整されていることがわかる。

6、　まとめ

最後に、この論文で我々がやったこと、そしてやれなかったことを簡単にまとめておく。

Section3 において、我々は多数の資産が存在する経済について、ラムゼイ流の最適資産収益課税を特徴付けた。特徴付けにあたっては、代表的消費者の存在する連続時間モデルを用い、不確実性を伊藤過程であらわした。我々の特徴付けは、最適資産収益課税がショックに対してどれだけ反応すべきかを明らかにしていた。そしてそれはショックが消費や労働供給の均衡経路に（特に異時点間代替の弾力性に）どれだけ大きな影響を与えるかによって決まっていた。我々の特徴付けを、決定論的なモデルでの特徴付けと比較すると、リスクを表す項が新たに加わったものとなっている。この意味で、我々の特徴付けは、決定論的なフレームにおける分析の自然な拡張と位置付けることが出来る。また、不確実性下における離散モデルでの特徴付けと比較すると、我々のフレームでは、高次のモーメントをより明示的に分析できるようになっていた。

Section ４では、直感的な理解を促すために、効用関数をいくつかの代表的な形に特定化した。そして、より分析しやすい近似公式を導出するとともに、既存の代表的な諸結果が、我々の公式と整合的であることを確認した。それらの諸結果とは以下のようなものであった。

１、決定論的な状況では定常状態において最適資本課税は０である（Chamley(1986), Judd(1985)）

２、消費と労働に関して Homogeneous な効用関数において、最適資本課税は常に０である（Zhu(1992)）

３、分離可能であり、かつ消費に関して Homogeneous な効用関数において、最適資本課税は常に０である（Zhu(1992)）

４、定常分布上において、最適資本課税の値は０ではないが、非常に小さい（Chari-Christiano-Kehoe(1994)）

５、最適資本課税の分散はリスク回避度が大きいほど、大きい（Chari-Christiano-Kehoe(1994)）

Section5 では我々の分析フレームの利点を生かして、2 つの発展的な話題を分析した。その第一は、政府と民間で直面するリスクが異なる場合の最適資産課税ルールの分析である。政府と民間において直面するリスクが異なるようなケースはいくつか考えられるが、ここでは民間の代表的消費者がブランチャード流の Life time uncertainty に直面している状況を考えた。そこでは、直面するリスクの相違が最適資産所得課税ルールにどのように反映されるかが分析された。第二は、不確実性の大きさが経済全体の規模に影響されるような場合（ショックへの外部効果）の最適資産課税ルールの分析である。ここでは政府と民間において、操作変数が異なる場合の最適資産課税ルールへの影響が調べられた。そして、どちらのケースにおいても民間と政府間の非対称性を修正するように、最適課税は修正された。ただしこの場合にも課税による歪みは考慮される。

最後に残された課題についてまとめよう。

この論文でやれなかったことの第一は、金融資産市場が不完備な場合の最適資産課税公式の特徴付けである。我々の分析では、仮定１において完備市場の仮定を置いていた。仮定 1 では正方行列の仮定を置いたが、これは簡単化のためであって、正則行列ならば、たとえ $m<n$ であっても我々の分析はそのまま成立する。しかしながら不完備な場合にここでの分析をそのまま拡張するのは技術的に難しい。不完備な場合、資産間の裁定条件式からリスクの価格が一意に決定できないからである。しかしその一方で、C-CAPM とのアナロジーで考えれば、我々の公式も不完備金融市場下にも拡張できると予想できる。この点の厳密な証明は別稿でおこないたい。

やれなかったことの第二は、政府と民間の間での情報の違いと最適政策の関係を調べること

である。政府と民間での得られる情報の相違について、少なくともマクロ経済学では、これまで系統立った分析はほとんどおこなわれてこなかった。その理由は分析のための定式化が難しいからだと思われるが、今後明らかにされるべき話題であることは多くの経済学者の合意するところであろう。この問題については今後の大きな課題としたい。

Appendix

Lemma1

(20) $$\frac{T^{la}}{p^l} = \sum_i \frac{k^i}{a}\hat{\boldsymbol{q}}^{ia} \qquad \vee \boldsymbol{a} = 1, 2, \cdots, m$$

(21) $$\frac{T^{ba}}{p^b} = \frac{H^a}{\boldsymbol{l}} \qquad \vee \boldsymbol{a} = 1, 2, \cdots, m$$

(22) $\boldsymbol{y}^c = \boldsymbol{d}c$、$\boldsymbol{y}^l = \boldsymbol{d}l$

Lemma2

(23) $$\frac{d\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}} = 0$$

Lemma １、２の証明

(20)について：　まず、(11)(12)をたすと、

(A1) $ap^b = \boldsymbol{l}p^l$

(11)と(A1)から、$p^b / \boldsymbol{l}$ を消去すると、

(A2) $$\frac{\boldsymbol{j}^i k}{a} = \sum_a \frac{T^{la}}{p^l}\hat{\boldsymbol{s}}^{ia} \qquad \vee i$$

$\hat{\boldsymbol{s}}^{ia}$ の定義から(A2)は

(20) $$\frac{T^{la}}{p^l} = \sum_i \frac{k^i}{a}\hat{\boldsymbol{q}}^{ia} \qquad \vee \boldsymbol{a} = 1, 2, \cdots, m$$

を意味する。

(21)について：　いま、(A1)の変化率をとると

(A3) $$\frac{d\left(ap^b\right)}{ap^b} - \frac{d\left(\boldsymbol{l}p^l\right)}{\boldsymbol{l}p^l} = \frac{da}{a} + \frac{dp^b}{p^b} + \frac{da}{a}\frac{dp^b}{p^b} - \frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} - \frac{dp^l}{p^l} - \frac{d\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}\frac{dp^l}{p^l} = 0$$

である。(A3)に(1)(6)(18)(19)および(20)を代入して、dz^a 項を消去すると、

(21) $\quad \dfrac{T^{ba}}{p^b} = \dfrac{H^a}{l} \qquad \vee\, a = 1, 2, \cdots, m$

が成立していることが分かる。さらに、(21)を考慮して、(6)(18)を比較することによって、

(A4) $\quad \dfrac{dp^b}{p^b} = \dfrac{d\,l}{l}$

が分かる。すなわち税による歪み(価値)の成長率は資産（価値）の成長率に等しくなる。

(22)について：　まず、(13)から直接に$y^l = d\,l$が得られる。

つぎに、(A3)(A4)から

(A5) $\quad \dfrac{da}{a} = \dfrac{dp^l}{p^l}$

が成立するから、(A5)式のdt項を比較することで、$y^c = d\,c$が得られる。

ただし、(19)に(A1)を代入してp^lを消去し、dの定義と(20)および$y^l = d\,l$をもちいて整理すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dp^l}{p^l} &= \left(r^b + \frac{y^c}{p^l} - \frac{y^l}{p^l}\hat{w} + \sum_a \frac{T^{la}}{p^l} \sum_i \hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^i - r^b\right) \right) dt + \sum_a \frac{T^{la}}{p^b} dz^a \\
&= \left(r^b + \frac{l\,y^c}{ap^b} - \frac{l\,y^l}{ap^b}\hat{w} + \sum_a \frac{lT^{la}}{ap^b} \sum_i \hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^i - r^b\right) \right) dt + \sum_a \frac{T^{la}}{p^b} dz^a \\
&= \frac{1}{a}\left(r^b a - \frac{y^c}{d} + \hat{w}l + \sum_a \sum_i \frac{l}{p^b} T^{la} \hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^i - r^b\right) \right) dt + \sum_a \sum_i \frac{k^i}{a} \hat{q}^{ia} dz^a
\end{aligned}
$$

であり、さらに(11)の両辺に$\left(\hat{r}^i - r^b\right)$をかけて、$i$について足し合わせることで、

$$
\sum_i k^i\left(\hat{r}^i - r^b\right) = \sum_a \sum_i \frac{l}{p^b} T^{la} \hat{s}^{ia}\left(\hat{r}^i - r^b\right)
$$

であることを用いれば、

$$
\frac{dp^l}{p^l} = \frac{1}{a}\left(\sum_i \hat{r}^i k^i + r^b a + \hat{w}l - \frac{y^c}{d} \right) dt + \sum_a \sum_i \frac{k^i}{a} \hat{q}^{ia} dz^a
$$

であることをもちいて(A5)を整理した。

(23)について：　また、dの定義より、

$$
dd = -d\left(\frac{p^b}{l}\right) = -\frac{p^b}{l}\left\{ \frac{dp^b}{p^b} - \frac{d\,l}{l} + \left(\frac{d\,l}{l}\right)^2 - \left(\frac{d\,l}{l}\right)\left(\frac{dp^b}{p^b}\right) \right\}
$$

であるから、(A4)から$dd = 0$であり、(23)が成立する。□

References

Atkinson, Anthony B., and Sandmo, Agnar. 1980. "Welfare Implications of the Taxation of Savings. " *Econ. J.* 90: 529-49.

Atkinson, Anthony B., and Stiglitz, Joseph E. 1972. "The Structure of Indirect Taxation and Economic Efficiency." *J. Public Econ.* 1: 97- 119.

Auerbach, Alan J., and Feldstein, Martin, eds. 1985. *Handbook of Public Economics.* New York: North-Holland.

Bismut, Jean-Michel. 1973. "Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control." *J. Math. Analysis and Applications* 44: 387-404.

Bismut, Jean-Michel. 1975. "Growth and Optimal Intertemporal Allocation of Risks." *J. Econ. Theory* 10: 239-257.

Brock, William. And Magill, Michael. 1979. "Dynamics under Uncertainty." *Econometrica* 47: 843-868.

Chamley, Christophe. 1986. "Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives." *Econometrica* 54: 607-22.

Chari, V. V.; Christiano, Lawrence J.; and Kehoe Patnck J. 1994. "Optimal Fiscal Policy in a Business Cycle Model." J. Political Econ. 102: 617-652.

Corsetti, Giancarlo. 1997. "A Portfolio Approach to Endogeneous Growth: Equilibrium and Optimal Policy." *J. Econ. Dynamics and Control* 21: 1627-1644.

Eaton, Jonathan. 1981. "Fiscal Policy, Inflation and the Accumulation of Risky Capital." Review of Economic Studies 48: 435-445.

Grinols, Earl L. and Turnovsky, Stephen J. 1993. "Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium." *J. Econ. Dynamics and Control* 17: 1-36.

Grinols, Earl L. and Turnovsky, Stephen J. 1998. "Risk, Optimal Government Finance and Monetary Policies in a Growing Economy." *Economica* 65: 401-427.

Jones, Larry E.; Manuelli, Rodolfo E.; and Rossi, Peter E. 1993. "Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth." *J. Political Econ.* 101: 485-517.

Jones, Larry E.; Manuelli, Rodolfo E.; and Rossi, Peter E. 1997. "On the Optimal Taxation of Capital Income." *J. Econ. Theory* 73: 93-117.

Judd, Kenneth L. 1985. 'Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model." *J. Public Econ.* 28: 59-83.

Judd, Kenneth L. 1999. "Optimal taxation and Spending in General Competitive

Growth Models." *J. Public Econ*. 71: 1-26.

Smith, William T. 1996 " Taxes, Uncertainty, and Long-term Growth." *European Econ. Review* 40: 1647-1664.

Zhu, Xiaodong. 1992. "Optimal Fiscal Policy in a Stochastic Growth Model." *J. Econ. Theory* 58: 250-289.